COGNOME	____________________	NON SCRIVERE QUI
NOME	____________________	1 2 3 4 5
MATRICOLA		
LAUREA	CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC	

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA
ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI
A.A. 2024-2025 — PARMA, 5 FEBBRAIO 2026

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Calcolate la lunghezza L della curva parametrica $\gamma(t) = t^2 e_1 + t^3 e_2 + (t^3/3)e_3$, $t \in [0, \sqrt{6}]$.

Soluzione. La curva γ è liscia e risulta

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{(2t)^2 + (3t^2)^2 + (t^2)^2} = t\sqrt{4 + 10t^2}, \qquad t \in [0, \sqrt{6}].$$

La lunghezza di γ è quindi data da

$$L = \int_0^{\sqrt{6}} t\sqrt{4 + 10t^2}\, dt = \frac{1}{30}\left(4 + 10t^2\right)^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{6}} = \frac{1}{30}\left[(64)^{3/2} - 4^{3/2}\right] = \frac{84}{5}.$$

Esercizio 2. Determinate $a \in \mathbb{R}$ in modo che il piano tangente al grafico della funzione

$$f(x, y) = (x + ay)\mathrm{e}^{xy}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

nel punto $P = (0, 1)$ sia perpendicolare al vettore $v = (0, 1, 1)$.

Soluzione. La funzione f è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^2$ con derivate parziali date da

$$f_x(x, y) = \left(ay^2 + xy + 1\right)\mathrm{e}^{xy} \qquad \text{e} \qquad f_x(x, y) = \left(x^2 + axy + a\right)\mathrm{e}^{xy}$$

per ogni (x, y) e quindi il piano tangente al grafico di f nel punto $P = (0, 1)$ è perpendicolare al vettore $n = (1 + a, a, -1)$. Deve quindi essere

$$n = \lambda v \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 1 + a = 0 \\ a = \lambda \\ -1 = \lambda \end{cases}$$

per $\lambda \neq 0$ da cui segue $a = -1$.

Esercizio 3. Sia

$$f(x,y,z)=x^4-4x^2+y^2+4z^2-8xz+8x+2y-8z, \qquad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

(a) Determinate gli eventuali punti critici di f e stabilitene la natura.

(b) Determinate l'immagine $f(\mathbb{R}^3)$.

Soluzione. (a) La funzione f è un polinomio e quindi è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Le derivate parziali di f sono date da

$$f_x(x,y,z)=4x^3-8x-8z+8; \qquad f_y(x,y,z)=2y+2; \qquad f_z(x,y,z)=8z-8x-8;$$

per ogni (x,y,z) e quindi i punti critici sono le soluzioni del sistema formato dalle equazioni

$$\begin{cases} 4x^3-8x-8z+8=0 \\ 2y+2=0 \\ 8z-8x-8=0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^3-2x-2z+2=0 \\ y=-1 \\ z=x+1 \end{cases} \iff \begin{cases} x\left(x^2-4\right)=0 \\ y=-1 \\ z=x+1 \end{cases}$$

cui corrispondono i punti di coordinate

$$P=(0,-1,1); \qquad Q=(2,-1,3); \qquad R=(-2,-1,-1);$$

a seconda che sia $x=0$ o $x=\pm 2$. La funzione f ha dunque tre punti critici.
Per determinare la natura dei punti critici, calcoliamo la matrice hessiana di f che è

$$D^2f(x,y,z)=\begin{pmatrix} 12x^2-8 & 0 & -8 \\ 0 & 2 & 0 \\ -8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

per ogni (x,y,z). Posto

$$\Delta_m=\det\left((D^2f)_h^i\right)_{1\le h,i\le j}, \qquad j=1,2,3,$$

per il criterio di Sylvester si ha

$$D^2f(P)=\begin{pmatrix} -8 & 0 & -8 \\ 0 & 2 & 0 \\ -8 & 0 & 8 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \Delta_1=-8 \\ \Delta_2=-16 \\ \Delta_3=256 \end{cases} \implies P \text{ punto di sella;}$$

$$D^2f(Q)=D^2f(R)=\begin{pmatrix} 40 & 0 & -8 \\ 0 & 2 & 0 \\ -8 & 0 & 8 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \Delta_1=40 \\ \Delta_2=80 \\ \Delta_3=512 \end{cases} \implies Q \text{ e } R \text{ punti di minimo locale.}$$

(b) A meno del termine $-8xz$, la funzione f è somma di tre polinomi di grado pari in x, y e z rispettivamente, ciascuno dei quali è limitato inferiormente e diverge a $+\infty$ al tendere di x, y o z a $\pm\infty$. Si ha infatti

$$-8xz=-2(4x)(z)\ge -16x^2-z^2$$

per ogni x e z da cui segue

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^4-4x^2+y^2+4z^2-8xz+8x+2y-8z= \\ &\ge x^4-4x^2+y^2+4z^2-16x^2-z^2+8x+2y-8z= \\ &= x^4-20x^2+y^2+3z^2+8x+2y-8z=\left(x^2-\sqrt{10}\right)^2+(y+1)^2+3(z-4/3)^2-\frac{17}{3}\to+\infty \end{aligned}$$

per $(x,y,z)\to\infty$. Pertanto, la funzione f diverge a $+\infty$ per $(x,y,z)\to\infty$ e dunque ha minimo globale per il teorema di Weierstrass. Conseguentemente, uno dei due punti Q e R di minimo locale è in effetti punto di minimo globale. Da $f(Q)=f(R)=-21$ e dal teorema dei valori intermedi segue infine $f(\mathbb{R}^3)=[-21,+\infty)$.

Esercizio 4. Sia

$$K = \left\{(x\,,y\,,z):\ x\,,y \geq 0,\ x^2+y^2-2(x+y)+z \leq 2 \text{ e } 2x+2y-z \leq 2\right\}.$$

(a) Descrivete l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K xy\, d(x\,,y\,,z)$.

Soluzione. L'insieme K è la porzione di spazio che è contenuta nel poliedro definito da $x \geq 0$ e $y \geq 0$ e che sta al di sopra del piano di equazione $z = 2x+2y-2$ e al di sotto del paraboloide di equazione $z = 4-(x-1)^2+(y-1)^2$ avente vertice nel punto di coordinate $V = (1,1,4)$, asse parallelo all'asse z e falda rivolta verso il basso.
L'insieme K è compatto perché è limitato come risulta dalla successiva determinazione della proiezione $\pi_{xy}(K)$ sul piano xy e delle relative sezioni ed è inoltre intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue. Pertanto, l'insieme K è (Lebesgue) misurabile. La funzione $(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto xy$ è un polinomio e quindi è integrabile in K.
La proiezione di K sul piano $z = 0$ è il quarto di cerchio

$$\pi_{xy}(K) = \left\{(x\,,y):\ x\,,y \geq 0 \text{ e } x^2+y^2 \leq 4\right\}$$

e la corrispondente sezione è l'intervallo

$$K_{(x,y)} = \left[2x+2y-2\,,4-(x-1)^2-(y-1)^2\right], \qquad (x\,,y) \in \pi_{xy}(K).$$

Pertanto, integrando per fili e usando coordinate polari nel piano, risulta

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi_{xy}(K)} \left(\int_{2x+2y-2}^{4-(x-1)^2-(y-1)^2} xy\, dz\right) d(x\,,y) = \\ &= \int_{\pi_{xy}(K)} xy\left(4-x^2-y^2\right)\, d(x\,,y) = \\ &= \int_0^{\pi/2} \cos\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int_0^2 r^3\left(4-r^2\right)\, dr = \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\theta\Big|_0^{\pi/2} \left(r^4-\frac{1}{6}r^6\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{2}\left(16-\frac{64}{6}\right) = \cdots = \frac{8}{3}. \end{aligned}$$

Esercizio 5. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \dfrac{2\mathrm{e}^{x(t)} - 1}{\mathrm{e}^{x(t)}} \\ x(0) = -1, \end{cases}$$

(a) determinate la soluzione massimale $x(t)$;

(b) calcolate i limiti di $x(t)$ agli estremi dell'intervallo massimale di esistenza.

Soluzione. (a) L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili. La funzione a secondo membro è $f(t,x) = g(t)h(x)$ con

$$g(t) = 1, \qquad t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad h(x) = \frac{2\mathrm{e}^x - 1}{\mathrm{e}^x}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

La funzione h è infinite volte derivabile e quindi il problema di Cauchy considerato ha soluzione massimale $x \in C^\infty(\alpha, \beta)$ con $-\infty \le \alpha < 0 < \beta \le +\infty$. Tale soluzione è prolungamento di ogni altra soluzione del medesimo problema di Cauchy.
Essendo $h(-\log 2) = 0$ e $h(x) < 0$ per $x < -\log 2$, la soluzione massimale verifica $x(t) < 0$ per ogni $\alpha < t < \beta$ per il teorema di unicità. Si ha quindi

$$\frac{\mathrm{e}^{x(t)}}{2\mathrm{e}^{x(t)} - 1} x'(t) = 1, \qquad \alpha < t < \beta,$$

e, ponendo

$$H(y) = \int_{-1}^{y} \frac{\mathrm{e}^z}{2\mathrm{e}^z - 1}\, dz = \log \sqrt{\left|2\mathrm{e}^z - 1\right|}\,\Big|_{-1}^{y} = \log \sqrt{\frac{1 - 2\mathrm{e}^y}{1 - 2\mathrm{e}^{-1}}}, \qquad y < -\log 2,$$

si deduce che la funzione composta $H \circ x$ è in $C^\infty(\alpha, \beta)$ e verifica $(H \circ x)'(t) = 1$ per $\alpha < t < \beta$ e $H \circ x(0) = 0$. Dunque, per il teorema fondamentale del calcolo, deve essere $(H \circ x)(t) = t$ per $\alpha < t < \beta$ da cui segue con semplici calcoli

$$x(t) = \log\left(\frac{1 - (\mathrm{e} - 2)\mathrm{e}^{2t-1}}{2}\right), \qquad \alpha < t < \beta.$$

Poiché si ha

$$\lim_{y \to -\infty} H(y) = \lim_{y \to 0^+} \log \sqrt{\frac{1 - 2\mathrm{e}^y}{1 - 2\mathrm{e}^{-1}}} = \log \sqrt{\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e} - 2}};$$

$$\lim_{y \to (-\log 2)^-} H(y) = \lim_{y \to (-\log 2)^-} \log \sqrt{\frac{1 - 2\mathrm{e}^y}{1 - 2\mathrm{e}^{-1}}} = -\infty;$$

si conclude che risulta

$$\alpha = -\infty \qquad \text{e} \qquad \beta = \log \sqrt{\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e} - 2}}.$$

La soluzione massimale è dunque

$$x(t) = \log\left(\frac{1 - (\mathrm{e} - 2)\mathrm{e}^{2t-1}}{2}\right), \qquad t < \log \sqrt{\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e} - 2}}.$$

(b) Si ha

$$\lim_{t \to -\infty} x(t) = \lim_{t \to -\infty} \log\left(\frac{1 - (\mathrm{e} - 2)\mathrm{e}^{2t-1}}{2}\right) = -\log 2;$$

$$\lim_{t \to \left(\log \sqrt{\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-2}}\right)^-} x(t) = \lim_{t \to \left(\log \sqrt{\frac{\mathrm{e}}{\mathrm{e}-2}}\right)^-} \log\left(\frac{1 - (\mathrm{e} - 2)\mathrm{e}^{2t-1}}{2}\right) = -\infty.$$
