

COGNOME _____ NOME _____ MATRICOLA _____ LAUREA    CIV AMB    GEST    INF ELN TLC    MEC	NON SCRIVERE QUI <table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 20px; height: 20px;">1</td> <td style="width: 20px; height: 20px;">2</td> <td style="width: 20px; height: 20px;">3</td> <td style="width: 20px; height: 20px;">4</td> <td style="width: 20px; height: 20px;">5</td> </tr> </table> <div style="border: 1px solid black; width: 100px; height: 100px; margin: 10px auto;"></div>	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5		

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA  
 DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA  
 ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI  
 A.A. 2024-2025 — PARMA, 8 GENNAIO 2026

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio.  
 Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

**Esercizio 1.** Calcolate l'integrale curvilineo

$$I = \int_{\gamma} x \, dl(x, y)$$

ove  $\gamma: [0, \pi/3] \rightarrow \mathbb{R}^3$  è la curva parametrica definita da

$$\gamma(t) = (2 \operatorname{sen} t) e_1 + (\cos(2t)) e_2, \quad t \in [0, \pi/3].$$

**Soluzione.** Poiché la curva parametrica  $\gamma$  è liscia e la funzione  $f(x, y) = x$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  è lineare e quindi continua, risulta

$$\begin{aligned}
 I &= \int_{\gamma} f \, dl = \int_0^{\pi/3} f(2 \operatorname{sen} t, \cos(2t)) \|\gamma'(t)\| \, dt = \\
 &= \int_0^{\pi/3} 4 \cos t \operatorname{sen} t \sqrt{1 + 4 \operatorname{sen}^2 t} \, dt = \int_0^{\sqrt{3}/2} 4t \sqrt{1 + 4t^2} \, dt = \frac{1}{3} (1 + 4t^2)^{3/2} \Big|_0^{\sqrt{3}/2} = \frac{7}{3}.
 \end{aligned}$$

**Esercizio 2.** Determinate  $c \in \mathbb{R}$  in modo che la funzione  $x(t) = \arctan(e^t + c)$ ,  $t \in \mathbb{R}$ , sia soluzione dell'equazione differenziale

$$x'(t) = \frac{e^t}{e^{2t} + 2 \tan(x(t))}, \quad t \in \mathbb{R}.$$

**Soluzione.** Poiché risulta

$$x'(t) = \frac{e^t}{1 + (e^t + c)^2} \quad \text{e} \quad \tan(x(t)) = e^t + c$$

per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , la funzione  $x(t)$  risulta essere una soluzione dell'equazione differenziale proposta se e solo se risulta

$$\frac{e^t}{1 + (e^t + c)^2} = \frac{e^t}{e^{2t} + 2(e^t + c)}$$

per ogni  $t$  ovvero

$$1 + (e^t + c)^2 = e^{2t} + 2(e^t + c) \quad \iff \quad 2(c - 1)e^t + (c - 1)^2 = 0$$

per ogni  $t$  da cui segue evidentemente  $c = 1$ .

**Esercizio 3.** Determinate i numeri  $a \in \mathbb{R}$  per i quali il campo vettoriale  $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  di componenti  $f = (f^1, f^2)$  definite da

$$\begin{cases} f^1(x, y) = (ax - 2y) \cos(x + y) - x^2 \sin(x + y) \\ f^2(x, y) = -2y \cos(x + y) - (x^2 + 2) \sin(x + y) \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

risulta conservativo in  $\mathbb{R}^2$  e per tali  $a$  calcolate l'integrale curvilineo

$$I = \int_{\gamma} f \cdot dl$$

ove  $\gamma$  è la curva parametrica  $\gamma(t) = t(t - \pi/2)e_1 + te_2$ ,  $t \in [0, \pi/2]$ .

**Soluzione.** (a) Essendo  $\mathbb{R}^2$  un aperto convesso, il campo vettoriale  $f$  è conservativo in  $\mathbb{R}^2$  se e solo se è irrotazionale in  $\mathbb{R}^2$  ovvero se e solo se risulta

$$f_y^1(x, y) = f_x^2(x, y), \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Le derivate in croce di  $f$  sono date da

$$\begin{aligned} f_y^1(x, y) &= -2 \cos(x + y) - (ax - 2y) \sin(x + y) - x^2 \cos(x + y) = \\ &= -(x^2 + 2) \cos(x + y) - (ax - 2y) \sin(x + y); \\ f_x^2(x, y) &= 2y \sin(x + y) - 2x \sin(x + y) - (x^2 + 2) \cos(x + y) = \\ &= 2(y - x) \sin(x + y) - (x^2 + 2) \cos(x + y) \end{aligned}$$

per ogni  $(x, y)$  e quindi il campo  $f$  risulta irrotazionale in  $\mathbb{R}^2$  se e solo si ha

$$-ax \sin(x + y) = -2x \sin(x + y)$$

per ogni  $(x, y)$  da cui segue evidentemente  $a = 2$ . Per tale valore, le componenti del campo  $f$  diventano

$$\begin{cases} f^1(x, y) = 2(x - y) \cos(x + y) - x^2 \sin(x + y) \\ f^2(x, y) = -2y \cos(x + y) - (x^2 + 2) \sin(x + y) \end{cases} \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

(b) Per  $a = 2$ , un potenziale del campo vettoriale  $f$  è dato da

$$\begin{aligned} F(x, y) &= \int_0^x f^1(t, 0) dt + \int_0^y f^2(x, t) dt = \\ &= \int_0^x (2t \cos t - t^2 \sin t) dt + \int_0^y [-2t \cos(x + t) - (2 + x^2) \sin(x + t)] dt = \\ &= t^2 \cos t \Big|_0^x - \left[ 2t \sin(x + t) - x^2 \cos(x + t) \right] \Big|_0^y = \\ &= x^2 \cos x - 2y \sin(x + y) + x^2 \cos(x + y) - x^2 \cos x = \\ &= x^2 \cos(x + y) - 2y \sin(x + y) \end{aligned}$$

per ogni  $(x, y)$ . L'integrale curvilineo del campo conservativo  $f$  è allora dato dalla differenza di potenziale agli estremi della curva  $\gamma$  e quindi, da

$$\gamma(0) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{e} \quad \gamma(\pi/2) = \begin{pmatrix} 0 \\ \pi/2 \end{pmatrix},$$

segue

$$I = \int_{\gamma} f \cdot dl = F(0, \pi/2) - F(0, 0) = -\pi.$$

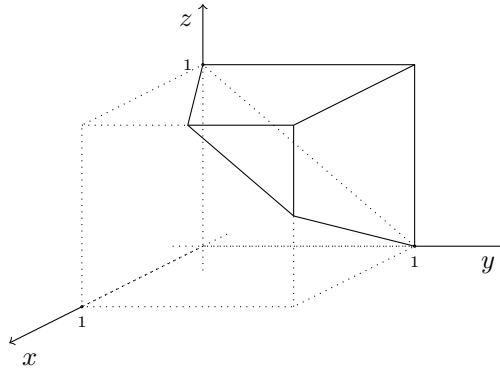
**Esercizio 4.** Sia

$$K = \{(x, y, z) : 0 \leq x, y, z \leq 1 \text{ e } x - 2y - 2z \leq -2\}.$$

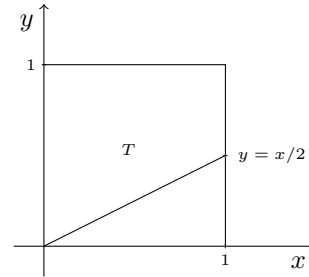
(a) Descrivete e disegnate l'insieme  $K$ .

(b) Calcolate  $I = \int_K xy \, d(x, y, z)$ .

**Soluzione.** (a) L'insieme  $K$  è il poliedro formato dai punti del cubo unitario  $Q = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$  che stanno al di sopra del piano  $x - 2y - 2z = -2$ . Esso è rappresentato in Figura (1).



(1)



(2)

(b) L'insieme  $K$  è chiuso in quanto intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni lineari ed è evidentemente limitato poiché contenuto nel cubo unitario  $Q$ . Pertanto, l'insieme  $K$  è compatto e quindi (Lebesgue) misurabile. Inoltre, la funzione  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto xy$  è un polinomio e quindi è integrabile su ogni insieme compatto.

Calcoliamo l'integrale di  $f$  su  $K$  mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione di  $K$  sul piano  $xy$  è il trapezio

$$T = \pi_{xy}(K) = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1 \text{ e } y \geq x/2\}$$

(Figura (2)) e per ogni  $(x, y) \in T$  la corrispondente sezione è l'intervallo

$$K_{(x,y)} = [x/2 - y + 1, 1], \quad (x, y) \in T.$$

Utilizzando due volte la formula di riduzione si ha allora

$$\begin{aligned} I &= \int_T \left( \int_{x/2-y+1}^1 xy \, dz \right) d(x, y) = \int_T xy \left( y - \frac{x}{2} \right) d(x, y) = \\ &= \int_0^1 \left( \int_{x/2}^1 xy \left( y - \frac{x}{2} \right) dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left( \frac{1}{3}xy^3 - \frac{1}{4}x^2y^2 \right) \Big|_{x/2}^1 dx = \\ &= \int_0^1 \left[ \frac{1}{3}x \left( 1 - \frac{1}{8}x^3 \right) - \frac{1}{4}x^2 \left( 1 - \frac{1}{4}x^2 \right) \right] dx = \\ &= \int_0^1 \left( \frac{1}{48}x^4 - \frac{1}{4}x^2 + \frac{1}{3}x \right) dx = \dots = \frac{29}{240}. \end{aligned}$$

---

**Esercizio 5.** Data l'equazione differenziale

$$x''(t) - x'(t) = \frac{2e^{3t}}{e^t + 1},$$

determinate

- (a) tutte le soluzioni dell'equazione differenziale;
- (b) la soluzione del problema di Cauchy con  $x(0) = x'(0) = 0$ .

---

**Soluzione.** (a) L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è  $\lambda^2 - \lambda = 0$  le cui soluzioni sono  $\lambda_1 = 0$  e  $\lambda_2 = 1$ . Quindi, le funzioni

$$x_1(t) = 1; \quad x_2(t) = e^t;$$

con  $t \in \mathbb{R}$  sono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni

$$x(t) = C_1 + C_2 e^t, \quad t \in \mathbb{R},$$

con  $C_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2$ ) costanti arbitrarie.

Per determinare una soluzione dell'equazione completa procediamo con il metodo della variazione delle costanti arbitrarie cercando una soluzione  $x_p(t)$  della forma

$$x_p(t) = c_1(t) + c_2(t)e^t, \quad t \in \mathbb{R},$$

con  $c_1(t)$  e  $c_2(t)$  funzioni da determinare in modo che risulti

$$\begin{cases} c_1'(t) + c_2'(t)e^t = 0 \\ c_2'(t)e^t = \frac{2e^{3t}}{e^t + 1} \end{cases} \iff \begin{cases} c_1'(t) = -\frac{2e^{3t}}{e^t + 1} \\ c_2'(t) = \frac{2e^{2t}}{e^t + 1} \end{cases}$$

per ogni  $t$  da cui segue

$$\begin{aligned} c_1(t) &= -2 \int \frac{e^{3t}}{e^t + 1} dt = -2 \int \left( e^{2t} - e^t + \frac{e^t}{e^t + 1} \right) dt = -e^{2t} + 2e^t - 2 \log(e^t + 1); \\ c_2(t) &= 2 \int \frac{e^{2t}}{e^t + 1} dt = 2 \int \left( e^t - \frac{e^t}{e^t + 1} \right) dt = 2e^t - 2 \log(e^t + 1); \end{aligned}$$

per ogni  $t$  a meno di inessenziali costanti additive. Risulta così

$$x_p(t) = e^{2t} + 2e^t - 2(e^t + 1) \log(e^t + 1), \quad t \in \mathbb{R},$$

e quindi tutte le soluzioni dell'equazione completa sono le funzioni

$$x(t) = C_1 + C_2 e^t + e^{2t} + 2e^t - 2(e^t + 1) \log(e^t + 1), \quad t \in \mathbb{R},$$

con  $C_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2$ ) costanti arbitrarie.

(b) Imponendo che sia  $x(0) = x'(0) = 0$ , con facili calcoli si trova  $C_1 = \log 4 - 1$  e  $C_2 = \log 4 - 2$  cosicché la soluzione cercata è

$$x(t) = e^{2t} + (e^t + 1) \log \left( \frac{2}{e^t + 1} \right)^2 - 1, \quad t \in \mathbb{R}.$$

---