

COGNOME _____ NOME _____ MATRICOLA _____ LAUREA    CIV AMB    GEST    INF ELN TLC    MEC	NON SCRIVERE QUI <table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 20px; height: 20px;">1</td> <td style="width: 20px; height: 20px;">2</td> <td style="width: 20px; height: 20px;">3</td> <td style="width: 20px; height: 20px;">4</td> <td style="width: 20px; height: 20px;">5</td> </tr> </table> <div style="border: 1px solid black; width: 100px; height: 100px; margin: 10px auto;"></div>	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5		

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA  
 DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA  
 ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI  
 A.A. 2024-2025 — PARMA, 14 NOVEMBRE 2025

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio.  
 Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

**Esercizio 1.** Determinate e disegnate l'insieme  $A$  dei punti  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  in cui la forma quadratica associata alla matrice hessiana della funzione  $f(x, y) = 2x^3 + 3xy^2$ ,  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  è definita negativa.

**Soluzione.** La funzione  $f$  è di classe  $C^\infty$  in  $\mathbb{R}^2$  e la matrice hessiana di  $f$  è

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 12x & 6y \\ 6y & 6x \end{pmatrix}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Denotati con  $\lambda_1(x, y)$  e  $\lambda_2(x, y)$  gli autovalori della matrice hessiana  $D^2 f(x, y)$ , la forma quadratica ad essa associata è definita negativa se e solo se risulta

$$\begin{cases} \lambda_1(x, y) < 0 \\ \lambda_2(x, y) < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \det(D^2 f(x, y)) > 0 \\ \operatorname{tr}(D^2 f(x, y)) < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 36(2x^2 - y^2) > 0 \\ 18x < 0. \end{cases}$$

Deve quindi essere  $|x| > |y|/\sqrt{2}$  e  $x < 0$  da cui segue

$$A = \left\{ (x, y) : |x| > |y|/\sqrt{2} \text{ e } x < 0 \right\}$$

che è la porzione di piano contenuta nel semipiano  $x < 0$  tra le rette di equazione  $y = \pm\sqrt{2}x$ .

**Esercizio 2.** Determinate i numeri  $a, b \in \mathbb{R}$  per i quali il campo vettoriale  $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$  di componenti  $f = (f^1, f^2)$  definite da

$$f^1(x, y) = e^{xy} (x^2 y + y^4 + ax); \quad f^2(x, y) = e^{xy} (x^3 + xy^3 + by^2) :$$

per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$  risulta conservativo in  $\mathbb{R}^2$  e per tali numeri  $a$  e  $b$  calcolate l'integrale curvilineo

$$\int_{\gamma} f \cdot dl$$

ove  $\gamma$  è l'arco parametrico definito da  $\gamma(t) = (t \arctan t)e_1 + (t^2 + t^3 \operatorname{sen} t)e_2$ ,  $t \in [-1, 1]$ .

**Soluzione.** Essendo  $\mathbb{R}^2$  convesso, il campo vettoriale  $f$  è conservativo in  $\mathbb{R}^2$  se e solo se è irrotazionale in  $\mathbb{R}^2$  ovvero se e solo se risulta  $f_y^1(x, y) = f_x^2(x, y)$  per ogni  $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ . Deve dunque essere

$$e^{xy} (x^3 y + xy^4 + ax^2 + x^2 + 4y^3) = e^{xy} (x^3 y + xy^4 + by^3 + 3x^2 + y^3)$$

per ogni  $(x, y)$  da cui segue che deve essere  $(a + 1)x^2 + 4y^3 = 3x^2 + (b + 1)y^3$  per ogni  $(x, y)$  e ciò accade per  $a = 2$  e  $b = 3$ . Per tali numeri  $a$  e  $b$  il campo vettoriale  $f$  è conservativo in  $\mathbb{R}^2$  e quindi, essendo  $\gamma$  un arco parametrico liscio e chiuso poiché risulta  $\gamma(-1) = (\pi/4, 1 + \operatorname{sen} 1) = \gamma(1)$ , risulta

$$\int_{\gamma} f \cdot dl = 0.$$

---

**Esercizio 3.** Dati il punto  $P = (0, 0, 1/2)$  e l'ellissoide

$$\Sigma = \{(x, y, z) : 2x^2 + 4y^2 + z^2 = 2\},$$

determinate

- (a) la distanza di  $P$  da  $\Sigma$ ;
- (b) il minimo  $R > 0$  per il quale la palla chiusa di centro  $P$  e raggio  $R$  contiene l'ellissoide  $\Sigma$ .

---

**Soluzione.** (a) La distanza di  $P$  dal punto di coordinate  $(x, y, z)$  è la radice quadrata della funzione

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z - 1/2)^2, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

e quindi la distanza  $d_\Sigma(P)$  di  $P$  dall'ellissoide  $\Sigma$  è la radice quadrata del minimo globale di  $f$  su  $\Sigma$ . Tale minimo esiste per il teorema di Weierstrass poiché la funzione  $f$  è continua e l'ellissoide  $\Sigma$  è compatto, essendo chiuso in quanto insieme degli zeri del polinomio  $\Phi(x, y, z) = 2x^2 + 4y^2 + z^2 - 2$ ,  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , e ovviamente limitato. Inoltre, l'ellissoide  $\Sigma$  è una 2-superficie regolare in  $\mathbb{R}^3$  poiché il gradiente di  $\Phi$  si annulla solo nell'origine che ovviamente non appartiene a  $\Sigma$ . È quindi possibile determinare il minimo globale di  $f$  su  $\Sigma$  con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Il sistema dei moltiplicatori di Lagrange è dato da

$$\begin{cases} 2x - 4\lambda x = 0 \\ 2y - 8\lambda y = 0 \\ 2(z - 1/2) - 2\lambda z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (1 - 2\lambda)x = 0 \\ (1 - 4\lambda)y = 0 \\ (1 - \lambda)z = 1/2 \end{cases}$$

cui va aggiunta l'equazione che esprime l'appartenenza del punto di coordinate  $(x, y, z)$  a  $\Sigma$ .

Chiaramente, dalla terza equazione segue che deve essere  $\lambda \neq 1$ . Per  $\lambda \neq 1$  e  $\lambda \notin \{1/2, 1/4\}$ , dalle prime due equazioni segue che deve essere  $x = y = 0$  e quindi dall'equazione che definisce  $\Sigma$  si ricava  $z = \pm\sqrt{2}$  cui corrispondono i punti  $Q_\pm = (0, 0, \pm\sqrt{2})$ .

Per  $\lambda = 1/2$  dalla seconda e dalla terza equazione si ricava che deve essere  $y = 0$  e  $z = 1$  e dall'equazione che definisce  $\Sigma$  si ottiene  $x = \pm 1/\sqrt{2}$  cui corrispondono i punti  $R_\pm = (\pm 1/\sqrt{2}, 0, 1)$ .

Infine, per  $\lambda = 1/4$  dalla prima e dalla terza equazione si ricava che deve essere  $x = 0$  e  $z = 2/3$  e dall'equazione che definisce  $\Sigma$  si ottiene  $y = \pm\sqrt{7/18}$  cui corrispondono i punti  $S_\pm = (0, \pm\sqrt{7/18}, 2/3)$ .

Per i punti così trovati si ha

$$f(Q_\pm) = \left(\pm\sqrt{2} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{9}{4} \mp \sqrt{2}; \quad f(R_\pm) = \frac{1}{2} + \left(1 - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{3}{4}; \quad f(S_\pm) = \frac{7}{18} + \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{12};$$

e, tenuto conto che con facili calcoli si verifica che risulta

$$\frac{9}{4} + \sqrt{2} > \frac{9}{4} - \sqrt{2} > \frac{9}{12} > \frac{5}{12},$$

si conclude che il punti di  $\Sigma$  a distanza minima da  $P$  sono i punti  $S_\pm$  e che la corrispondente distanza è  $d_\Sigma(S_\pm) = \sqrt{5/12}$ .

(b) Il minimo raggio  $R > 0$  per cui la palla chiusa di centro  $P$  e raggio  $R$  contiene l'ellissoide  $\Sigma$  è dato dalla distanza massima di  $P$  da  $\Sigma$  e quindi risulta

$$R = \sqrt{\frac{9}{4} + \sqrt{2}}.$$

---

---

**Esercizio 4.** Sia

$$K = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z \leq 1 \text{ e } x + y + z \geq 0\}.$$

(a) Descrivete l'insieme  $K$ .

(b) Calcolate  $I = \int_K xy \, d(x, y, z)$ .

---

**Soluzione.** L'insieme  $K$  è la porzione di spazio che sta al di sopra del piano di equazione  $x + y + z = 0$  e al di sotto del paraboloido di equazione  $z = 1 - x^2 - y^2$  che ha vertice nell'origine, asse parallelo all'asse  $z$  e falda rivolta verso il basso.

L'insieme  $K$  è compatto perché è limitato per quanto osservato sopra ed è intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue e quindi è (Lebesgue) misurabile. La funzione  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto xy$  è un polinomio e quindi è integrabile in  $K$ .

La proiezione di  $K$  sul piano  $z = 0$  è il cerchio

$$\pi_{xy}(K) = \{(x, y) : (x - 1/2)^2 + (y - 1/2)^2 \leq 3/2\}$$

e quindi, integrando per fili e usando coordinate polari nel piano con centro nel punto  $(1/2, 1/2)$ , risulta

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi_{xy}(K)} xy [3/2 - (x - 1/2)^2 - (y - 1/2)^2] \, d(x, y) = \\ &= \int_{[0, \sqrt{3/2}] \times [-\pi, \pi]} \left(\frac{1}{2} + r \cos \theta\right) \left(\frac{1}{2} + r \sin \theta\right) \left(\frac{3}{2} - r^2\right) r \, dr = \\ &= 2\pi \int_0^{\sqrt{3/2}} \frac{1}{4} r \left(\frac{3}{2} - r^2\right) \, dr = \dots = \frac{9}{32}\pi. \end{aligned}$$

---

**Esercizio 5.** Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = 3t^2 ([x(t)]^2 - x(t)) \\ x(0) = \frac{1}{1-e}, \end{cases}$$

determinate

- (a) la soluzione massimale  $x(t)$ ;
- (b) i limiti di  $x(t)$  agli estremi dell'intervallo massimale di esistenza.

---

**Soluzione.** L'equazione differenziale proposta può essere risolta come equazione a variabili separabili o come equazione di Bernoulli. Procediamo nel primo modo.

(a) La funzione a secondo membro è  $f(t, x) = g(t)h(x)$  con

$$g(t) = 3t^2, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad h(x) = x^2 - x, \quad x \in \mathbb{R}.$$

In tale intervallo la funzione  $h$  è infinite volte derivabile e quindi il problema di Cauchy considerato ha soluzione massimale  $x \in C^\infty(\alpha, \beta)$  con  $-\infty \leq \alpha = \alpha(x_0) < 0 < \beta = \beta(x_0) \leq +\infty$ . Tale soluzione è prolungamento di ogni altra soluzione del medesimo problema di Cauchy.

Poiché il dato iniziale  $x(0) = 1/(1-e)$  è negativo e la soluzione del medesimo problema di Cauchy con dato iniziale  $x(0) = 0$  è la funzione identicamente nulla  $x(t) = 0$  per ogni  $t \in \mathbb{R}$ , la soluzione massimale del problema di Cauchy considerato verifica la condizione  $x(t) < 0$  per ogni  $t \in (\alpha, \beta)$ . Ponendo

$$H(y) = \int_{1/(1-e)}^y \frac{1}{z^2 - z} dz = \int_{1/(1-e)}^y \left( \frac{1}{z-1} - \frac{1}{z} \right) dz = \log \left| \frac{z-1}{z} \right| \Big|_{1/(1-e)}^y = \log \left( \frac{y-1}{y} \right) - 1, \quad y < 0,$$

si deduce che la funzione composta  $H \circ x$  è in  $C^\infty(\alpha, \beta)$  e verifica  $(H \circ x)'(t) = 3t^2$  per  $\alpha < t < \beta$  e  $H \circ x(0) = 0$ . Per il teorema fondamentale del calcolo deve dunque essere  $(H \circ x)(t) = t^3$  per  $\alpha < t < \beta$  da cui segue con semplici calcoli

$$x(t) = \frac{1}{1 - e^{t^3+1}}, \quad \alpha < t < \beta.$$

Poiché si ha

$$\lim_{y \rightarrow -\infty} H(y) = -1 \quad \text{e} \quad \lim_{y \rightarrow 0^-} H(y) = +\infty,$$

deve essere  $t^3 > -1$  da cui segue

$$\alpha = -1 \quad \text{e} \quad \beta = +\infty.$$

La soluzione massimale è dunque

$$x(t) = \frac{1}{1 - e^{t^3+1}}, \quad t > -1,$$

(b) I limiti di  $x(t)$  agli estremi dell'intervallo massimale di esistenza sono

$$\lim_{t \rightarrow -1^+} \frac{1}{1 - e^{t^3+1}} = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{t \rightarrow +\infty} \frac{1}{1 - e^{t^3+1}} = 0^-.$$

---