Cognome ______________________

Nome ______________________

Matricola |_|_|_|_|_|_|

Laurea Civ Amb Gest Inf Eln Tlc Mec

Non scrivere qui

1	2	3	4	5

Università degli Studi di Parma

Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Esame di Analisi Matematica 2 — Soluzioni

A.A. 2024-2025 — Parma, 10 Settembre 2025

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Data la curva piana $\gamma\colon [0,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ di equazione polare $\rho(\theta) = \theta^2$, $\theta \in [0,2\pi]$, calcolate l'integrale curvilineo

$$I = \int_\gamma \frac{1}{4+\sqrt{x^2+y^2}}\, dl(x,y).$$

Soluzione. La funzione integranda

$$(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mapsto f(x,y) = \frac{1}{4+\sqrt{x^2+y^2}}$$

è continua e la curva γ è liscia con

$$\|\gamma'(\theta)\| = \sqrt{[\rho(\theta)]^2 + [\rho'(\theta)]^2} = \sqrt{\theta^4+4\theta^2}, \qquad \theta \in [0,2\pi].$$

Si ha allora

$$I = \int_0^{2\pi} f\big(\gamma(\theta)\big)\, \|\gamma'(\theta)\|\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{1}{4+\theta^2}\sqrt{\theta^4+4\theta^2}\, d\theta = \int_0^{2\pi} \frac{\theta}{\sqrt{4+\theta^2}}\, d\theta =$$
$$= \frac{1}{2}\int_0^{4\pi^2} \frac{1}{\sqrt{4+u}}\, du = \sqrt{4+u}\,\Big|_0^{4\pi^2} = 2\left(\sqrt{1+\pi^2}-1\right).$$

Esercizio 2. Determinate i punti $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ in cui il piano tangente al grafico della funzione

$$f(x,y) = (x+y)\mathrm{e}^{xy}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

è perpendicolare al vettore $n = (1,1,-1)$.

Soluzione. La funzione f è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^2$ con derivate parziali date da

$$f_x(x,y) = [1+y(x+y)]\,\mathrm{e}^{xy1} \qquad \text{e} \qquad f_x(x,y) = [1+x(x+y)]\,\mathrm{e}^{xy1}$$

per ogni (x,y). I punti (x,y) in cui il piano tangente è perpendicolare al vettore $n = (1,1,-1)$ sono i punti (x,y) in cui il vettore normale al grafico di f

$$N_f(x,y) = \begin{pmatrix} f_x(x,y) \\ f_y(x,y) \\ -1 \end{pmatrix}$$

coincide con n. Deve quindi essere

$$f_x(x,y) = [1+y(x+y)]\,\mathrm{e}^{xy} = 1 \qquad \text{e} \qquad f_x(x,y) = [1+x(x+y)]\,\mathrm{e}^{xy} = 1.$$

Uguagliando le due derivate, si trova che deve essere $(x+y)(x-y) = 0$. Per $x = y = t$, si trova $(1+2t^2)\mathrm{e}^{t_2} = 1$ e, confrontando i grafici di $t \mapsto \mathrm{e}^{t^2}$ e di $t \mapsto 1/(1+2t^2)$, si ricava che deve essere $t = 0$ cui corrispondono i punti di coordinate $\pm(1,1)$. Per $x = -y = t$ si trova invece $\mathrm{e}^{-t^2} = 1$ che di nuovo ha soluzione solo per $t = 0$. Pertanto, l'unico punto con la proprietà cercata è l'origine $(x,y) = (0,0)$.

Esercizio 3. Sia $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ la funzione definita da

$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - xyz, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Determinate i punti critici di f e stabilitene la natura.

(b) Determinate l'immagine $f(\mathbb{R}^3)$ di f.

Soluzione. (a) La funzione f è un polinomio e quindi è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Le derivate parziali di f sono date da

$$f_x(x,y,z) = 2x - yz; \qquad f_y(x,y,z) = 2y - xz; \qquad f_z(x,y,z) = 2z - xy;$$

per ogni (x,y,z) e quindi i punti critici sono le soluzioni del sistema formato dalle equazioni

$$\begin{cases} 2x - yz = 0 \\ 2y - xz = 0 \\ 2z - xy = 0. \end{cases}$$

Se $x = 0$, dalla prima equazione segue $yz = 0$ e quindi $y = 0$ o $z = 0$. Nel primo caso $y = 0$, dalla terza equazione segue $z = 0$ mentre, nel secondo caso $z = 0$, dalla seconda equazione segue $y = 0$. Quindi, da $x = 0$ segue $x = y = z = 0$ e alla stessa conclusione si perviene partendo da $y = 0$ o da $z = 0$. Pertanto, il punto $P = (0,0,0)$ è l'unico punto critico in cui vi è una coordinata nulla.
Cerchiamo quindi le eventuali soluzioni $x,y,z \neq 0$. Moltiplicando le tre equazioni per x, y e z rispettivamente, si ricava

$$x^2 = y^2 = z^2$$

da cui segue che tutte le coordinate sono uguali tra loro oppure due sono uguali tra loro e la rimanente è l'opposto delle altre due. Per $x = y = z = t \neq 0$, le tre equazioni divengono $2t = t^2$ da cui segue $t = 2$ cui corrisponde il punto $Q = (2,2,2)$. Per $x = y = t$ e $z = -t$ con $t \neq 0$, le tre equazioni divengono $2t = -t^2$ da cui segue $t = -2$ cui corrisponde il punto $R_1 = (-2,-2,2)$ e, con lo stesso ragionamento, permutando tra loro le coordinate si ottengono gli altri punti critici $R_2 = (-2,2,-2)$ e $R_3 = (2,-2,-2)$. La matrice hessiana di f è

$$D^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2 & -z & -y \\ -z & 2 & -x \\ -y & -x & 2 \end{pmatrix}, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Nel punto P la matrice hessiana è diagonale con autovalori uguali a 2 e quindi il punto P è un punto di minimo locale stretto di f. Negli altri punti critici Q e R_i $(i = 1,2,3)$ il determinante della matrice hessiana che è dato da

$$\det\left(D^2 f(x,y,z)\right) = 8 - 2xyz - 2(x2 + y2 + z^2), \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

è negativo e quindi, essendo il minore di ordine uno positivo, per il criterio di Sylvester si conclude che il punto Q e tutti i punti R_i $(i = 1,2,3)$ sono punti di sella di f.
(b) Per il teorema dei valori intermedi l'immagine $f(\mathbb{R}^3)$ di f è un intervallo e la restrizione di f alla retta parametrizzata da $\gamma(t) = te_1 + te_2 + te_3$. $t \in \mathbb{R}$, è

$$f \circ \gamma(t) = f(t,t,t) = 3t^2 - t^3, \qquad t \in \mathbb{R}^3.$$

Da $f \circ \gamma(t) = 3t^2 - t^3 \to \mp\infty$ per $t \to \pm\infty$ segue che f è illimitata superiormente e inferiormente e dunque risulta $f(\mathbb{R}^3) = \mathbb{R}$.

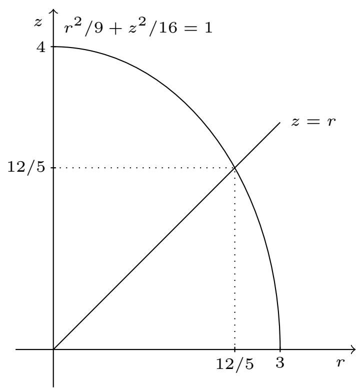
Esercizio 4. Sia

$$K = \left\{(x\,,y\,,z):\ x^2/9 + y^2/9 + z^2/16 \le 1 \text{ e } z \ge \sqrt{x^2+y^2}\right\}.$$

(a) Descrivete l'insieme K.

(b) Calcolate il volume (misura) di K.

Soluzione. L'insieme K è la porzione di spazio racchiusa dall'ellissoide di equazione $x^2/9+y^2/9+z^2/16 = 1$ che sta al di sopra del cono di equazione $z = \sqrt{x^2+y^2}$. È quindi il solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la figura contenuta nel primo quadrante del piano rz (con $r = \sqrt{x^2+y^2}$) compresa tra l'ellisse di equazione $r^2/9 + z^2/16 = 1$ e la retta di equazione $z = r$ come illustrato nella figura seguente.



L'insieme K è compatto perché è limitato ed è intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue e quindi è (Lebesgue) misurabile.
La misura $|K|$ è l'integrale della funzione costante uguale a 1 su K. Calcoliamo la misura di K mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione di K sul piano xy è il cerchio

$$\pi_{xy}(K) = \left\{(x\,,y):\ \sqrt{x^2+y^2} \le 12/5\right\}$$

e per ogni $(x\,,y) \in \pi_{xy}(K)$ la corrispondente sezione è l'intervallo

$$K_{(x,y)} = \left[\sqrt{x^2+y^2}\,, 4\sqrt{1-(x^2+y^2)/9}\right], \qquad (x\,,y) \in \pi_{xy}(K).$$

Per la formula di riduzione si ha allora

$$\begin{aligned}|K| = \int_K 1\, d(x\,,y\,,z) &= \int_{\pi_{xy}(K)} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{4\sqrt{1-(x^2+y^2)/9}} 1\, dz\right) d(x\,,y) = \\ &= \int_{\pi_{xy}(K)} \left[4\sqrt{1-(x^2+y^2)/9} - \sqrt{x^2+y^2}\right] d(x\,,y) =\end{aligned}$$

e quindi, utilizzando coordinate polari per calcolare l'integrale a destra, si ottiene

$$\begin{aligned}&= 2\pi \int_0^{12/5} \left(4\sqrt{1-r^2/9} - r\right) r\, dr = \\ &= 2\pi \left\{-12\left(1-r^2/9\right)^{3/2} - \frac{r^3}{3}\right\}\Big|_0^{12/5} = \\ &= 2\pi \left\{12\left[1 - \left(1-\frac{144}{225}\right)^{3/2}\right] - 4\frac{144}{125}\right\} = 2\pi\left(12\frac{98}{125} - 4\frac{144}{125}\right) = \cdots = \frac{48}{5}\pi.\end{aligned}$$

Esercizio 5. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = [x(t)]^2 + 4x(t) \\ x(0) = 1, \end{cases}$$

determinate

(a) la soluzione massimale $x(t)$;

(b) i limiti di $x(t)$ agli estremi dell'intervallo massimale di esistenza.

Soluzione. (a) L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili. La funzione a secondo membro è $f(t,x) = g(t)h(x)$ con

$$g(t) = 1, \qquad t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad h(x) = x^2 + 4x = x(x+4), \qquad x \in \mathbb{R}.$$

La funzione h è infinite volte derivabile e quindi il problema di Cauchy considerato ha soluzione massimale $x \in C^\infty(\alpha, \beta)$ con $-\infty \le \alpha < 0 < \beta \le +\infty$. Tale soluzione è prolungamento di ogni altra soluzione del medesimo problema di Cauchy.
Essendo $h(0) = 0$ e $h(x) > 0$ per $x > 0$, la soluzione massimale verifica $x(t) > 0$ per ogni $\alpha < t < \beta$ per il teorema di unicità. Si ha quindi

$$\frac{x'(t)}{[x(t)]^2 + 4x(t)} = 1, \qquad \alpha < t < \beta,$$

e, ponendo

$$H(y) = \int_1^y \frac{1}{z^2 + 4z}\, dz = \frac{1}{4} \int_1^y \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+4} \right) du = \frac{1}{4} \log \left(\frac{z}{z+4} \right) \Bigg|_1^y = \frac{1}{4} \log \left(\frac{y}{y+4} \right) + \frac{1}{4} \log 5$$

per ogni $y > 0$, si deduce che la funzione composta $H \circ x$ è in $C^\infty(\alpha, \beta)$ e verifica $(H \circ x)'(t) = 1$ per $\alpha < t < \beta$ e $H \circ x(0) = 0$. Dunque, per il teorema fondamentale del calcolo, deve essere $(H \circ x)(t) = t$ per $\alpha < t < \beta$ da cui segue con semplici calcoli

$$x(t) = \frac{5\mathrm{e}^{4t}}{5 - \mathrm{e}^{4t}}, \qquad \alpha < t < \beta.$$

Poiché si ha

$$\lim_{y \to 0^+} H(y) = \lim_{y \to 0^+} \left[\log \left(\frac{y}{y+4} \right) + \frac{1}{4} \log 5 \right] = -\infty,$$
$$\lim_{y \to +\infty} H(y) = \lim_{y \to +\infty} \left[\log \left(\frac{y}{y+4} \right) + \frac{1}{4} \log 5 \right] = \frac{1}{4} \log 5,$$

si conclude che risulta

$$\alpha = -\infty \qquad \text{e} \qquad \beta = \frac{1}{4} \log 5.$$

La soluzione massimale è dunque

$$x(t) = \frac{5\mathrm{e}^{4t}}{5 - \mathrm{e}^{4t}}, \qquad t < \frac{1}{4} \log 5.$$

(b) Si ha

$$\lim_{t \to -\infty} x(t) = \lim_{t \to -\infty} \frac{5\mathrm{e}^{4t}}{5 - \mathrm{e}^{4t}} = 0 \qquad \text{e} \qquad \lim_{t \to (\frac{1}{4}\log 5)^-} x(t) = \lim_{t \to -\infty} \frac{5\mathrm{e}^{4t}}{5 - \mathrm{e}^{4t}} = +\infty.$$