COGNOME	______________	NON SCRIVERE QUI	
NOME	______________	1 2 3 4 5	
MATRICOLA	⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌋		
LAUREA	CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC		

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA
ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI
A.A. 2024-2025 — PARMA, 16 LUGLIO 2025

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Determinate l'equazione parametrica della retta tangente alla curva parametrica

$$\gamma(t) = (\cos(2t))e_1 + (\mathrm{e}^{2t}\operatorname{sen} t)e_2, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

nel punto $t_0 = \pi/6$.

Soluzione. Siano $\gamma^1(t) = \cos(2t)$ e $\gamma^2(t) = \mathrm{e}^{2t}\operatorname{sen} t$, $t \in \mathbb{R}$, le componenti di γ. La curva parametrica γ è liscia e le equazioni della retta tangente a γ in $t_0 = \pi/6$ in forma parametrica e cartesiana sono rispettivamente date da

$$\begin{cases} x(s) = \gamma^1(\pi/6) + (\gamma^1)'(\pi/6)s \\ y(s) = \gamma^2(\pi/6) + (\gamma^2)'(\pi/6)s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}; \qquad (\gamma^2)'(\pi/6)[x - \gamma^1(\pi/6)] - (\gamma^1)'(\pi/6)[y - \gamma^2(\pi/6)] = 0.$$

Con facili calcoli si ha

$$\gamma(\pi/6) = \begin{pmatrix} 1/2 \\ \mathrm{e}^{\pi/3}/2 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \gamma'(\pi/6) = \begin{pmatrix} -\sqrt{3} \\ \mathrm{e}^{\pi/3}\left(1 + \sqrt{3}/2\right) \end{pmatrix}$$

da cui segue

$$\begin{cases} x(s) = 1/2 - \sqrt{3}s \\ y(s) = \mathrm{e}^{\pi/3}/2 + \mathrm{e}^{\pi/3}\left(1 + \sqrt{3}/2\right)s \end{cases} \quad s \in \mathbb{R}; \qquad \mathrm{e}^{\pi/3}\left(1 + \frac{\sqrt{3}}{2}\right)\left(x - \frac{1}{2}\right) + \sqrt{3}\left(y - \frac{\mathrm{e}^{\pi/3}}{2}\right) = 0.$$

Esercizio 2. Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ una funzione tale che

$$f(1,1) = \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad Df(1,1) = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$$

e sia $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ la funzione di componenti $g = (g^1, g^2)$ definite da

$$g^1(u,v) = u\log(1 + v^2) \qquad \text{e} \qquad g^2(u,v) = u^2 v$$

per ogni $(u,v) \in \mathbb{R}^2$. Calcolate la matrice gradiente della funzione composta $h = g \circ f$ nel punto $(1,1)$.

Soluzione. La funzione composta $h = g \circ f$ è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^2$ e, per la regola della catena, la sua matrice gradiente nel punto $(1,1)$ è data dalla formula

$$Dh(1,1) = Dg(f(1,1))Df(1,1).$$

Poiché la matrice gradiente di g nel punto $f(1,1) = (-1,1)$ è

$$Dg(-1,1) = \begin{pmatrix} \log(1+v^2) & 2uv/(1+v^2) \\ 2uv & u^2 \end{pmatrix}\Bigg|_{(x,y)=(-1,1)} = \begin{pmatrix} \log 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix},$$

risulta

$$Dh(1,1) = \begin{pmatrix} \log 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3\log 2 & -2 \\ -6 & 2 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 3. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ e sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ il campo vettoriale di componenti $f = (f^1, f^2)$ definite da

$$\begin{cases} f^1(x,y) = (2x - 2y)\cos(x+y) - x^2 \operatorname{sen}(x+y) \\ f^2(x,y) = (ax - 2y)\cos(x+y) + (b - x^2)\operatorname{sen}(x+y) \end{cases} \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Determinate a e b in modo che il campo f sia conservativo in $\mathbb{R}^2$.

(b) Per tali valori a e b, calcolate l'integrale curvilineo di f lungo la curva parametrica

$$\gamma(t) = \big(\pi + t(t - \pi/2)\big)\, e_1 + te_2, \qquad t \in [0\pi/2].$$

Soluzione. (a) Essendo $\mathbb{R}^2$ un aperto convesso, il campo vettoriale f è conservativo in $\mathbb{R}^2$ se e solo se è irrotazionale in $\mathbb{R}^2$ ovvero se e solo se risulta

$$f^1_y(x,y) = f^2_x(x,y), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Le derivate in croce di f sono date da

$$\begin{aligned} f^1_y(x,y) &= -2\cos(x+y) - (2x-2y)\operatorname{sen}(x+y) - x^2\cos(x+y) = \\ &= -(2+x^2)\cos(x+y) + (2y-2x)\operatorname{sen}(x+y); \\ f^2_x(x,y) &= a\cos(x+y) - (ax-2y)\operatorname{sen}(x+y) - 2x\operatorname{sen}(x+y) + (b-x^2)\cos(x+y) = \\ &= (a+b-x^2)\cos(x+y) + (2y-(a+2)x)\operatorname{sen}(x+y) \end{aligned}$$

per ogni (x,y) e quindi il campo f risulta irrotazionale in $\mathbb{R}^2$ se e solo si ha $a+b=-2$ e $-(a+2)=-2$ da cui segue $a=0$ e $b=-2$. Per tali valori, le componenti del campo f diventano

$$\begin{cases} f^1(x,y) = (2x - 2y)\cos(x+y) - x^2 \operatorname{sen}(x+y) \\ f^2(x,y) = -2y\cos(x+y) - (2 + x^2)\operatorname{sen}(x+y) \end{cases} \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(b) Per $a=0$ e $b=-2$, un potenziale del campo vettoriale f è dato da

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_0^x f^1(t,0)\,dt + \int_0^y f^2(x,t)\,dt = \\ &= \int_0^x \big(2t\cos t - t^2\operatorname{sen} t\big)\,dt + \int_0^y \big[-2t\cos(x+t) - (2+x^2)\operatorname{sen}(x+t)\big]\,dt = \\ &= t^2\cos t\Big|_0^x - \Big[2t\operatorname{sen}(x+t) - x^2\cos(x+t)\Big]\Big|_0^y = \\ &= x^2\cos x - 2y\operatorname{sen}(x+y) + x^2\cos(x+y) - x^2\cos x = \\ &= x^2\cos(x+y) - 2y\operatorname{sen}(x+y) \end{aligned}$$

per ogni (x,y). L'integrale curvilineo del campo conservativo f è allora dato dalla differenza di potenziale agli estremi della curva γ e quindi, da

$$\gamma(0) = \begin{pmatrix} \pi \\ 0 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \gamma(\pi/2) = \begin{pmatrix} \pi \\ \pi/2 \end{pmatrix},$$

segue

$$\int_\gamma f \cdot dl = F(\pi, \pi/2) - F(\pi, 0) = \pi^2\cos(3\pi/2) - \pi\operatorname{sen}(3\pi/2) - \pi^2\cos\pi = \pi + \pi^2.$$

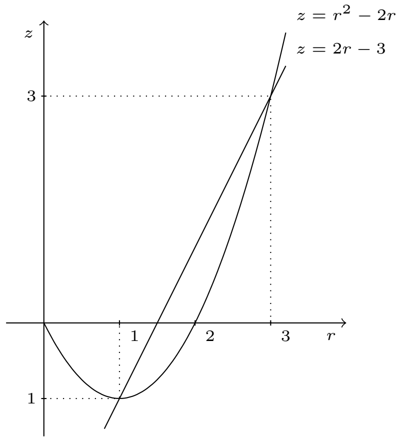
Esercizio 4. Sia

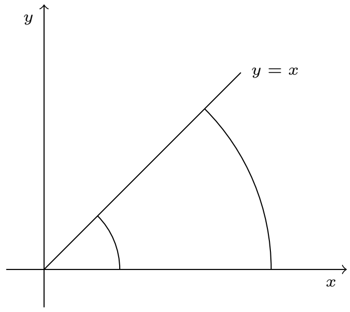
$$K = \left\{ (x\,,y\,,z) :\ x^2 + y^2 - 2\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2\sqrt{x^2+y^2} - 3 \text{ e } 0 \le y \le x \right\}.$$

(a) Descrivete e disegnate l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K x\, d(x\,,y\,,z)$.

Soluzione. L'insieme K è l'intersezione della parte del poliedro definito dai piani $y = 0$ e $y = x$ contenuta nel semispazio $x \ge 0$ con il solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la figura contenuta nel primo quadrante del piano rz (con $r = \sqrt{x^2+y^2}$) compresa tra la parabola di equazione $z = r^2 - 2r$ e la retta di equazione $z = 2r - 3$ come illustrato nella figura a sinistra.





L'insieme K è compatto perché è limitato ed è intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue e quindi è (Lebesgue) misurabile. La funzione $(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x$ è lineare e quindi è integrabile in K.

Calcoliamo l'integrale I mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione di K sul piano xy è l'insieme

$$\pi_{xy}(K) = \left\{ (x\,,y) :\ 1 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 3 \text{ e } 0 \le y \le x \right\}$$

rappresentato nella figura a destra e per ogni $(x\,,y) \in \pi_{xy}(K)$ la corrispondente sezione è l'intervallo

$$K_{(x,y)} = \left[x^2 + y^2 - 2\sqrt{x^2+y^2}\,, 2\sqrt{x^2+y^2} - 3 \right], \qquad (x\,,y) \in \pi_{xy}(K).$$

Per la formula di riduzione si ha allora

$$\begin{aligned} I = \int_K x\, d(x\,,y\,,z) &= \int_{\pi_{xy}(K)} \left(\int_{(x^2+y^2)-2\sqrt{x^2+y^2}}^{2\sqrt{x^2+y^2}-3} x\, dz \right) d(x\,,y) = \\ &= \int_{\pi_{xy}(K)} x \left[4\sqrt{x^2+y^2} - (x^2+y^2) - 3 \right] d(x\,,y) = \end{aligned}$$

e quindi, utilizzando coordinate polari per calcolare l'integrale a destra, si ottiene

$$\begin{aligned} &= \left(\int_0^{\pi/4} \cos\theta\, d\theta \right) \cdot \left(\int_1^3 r^2 \left(4r - r^2 - 3 \right) dr \right) = \\ &= \operatorname{sen}\theta \Big|_0^{\pi/4} \cdot \left(r^4 - \frac{1}{5} r^5 - r^3 \right) \Big|_1^3 = \ldots = \frac{28}{5\sqrt{2}}. \end{aligned}$$

Esercizio 5. Data l'equazione differenziale

$$x''(t) - 2x'(t) + 2x(t) = \mathrm{e}^t \cos^2 t \operatorname{sen}^2 t,$$

determinate

(a) tutte le soluzioni $x(t)$ dell'equazione differenziale;

(b) la soluzione $x(t)$ tale che $x(0) = x'(0) = 0$.

Soluzione. (a) L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = (\lambda - 1)^2 + 1 = 0$ le cui soluzioni complesse e coniugate sono date da $\lambda_\pm = 1 \pm i$. Quindi, le funzioni

$$x_1(t) = \mathrm{e}^t \cos t; \qquad x_2(t) = \mathrm{e}^t \operatorname{sen} t;$$

con $t \in \mathbb{R}$ sono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e si può procedere alla ricerca di una soluzione dell'equazione completa con il metodo di variazione delle costanti arbitrarie cercando una soluzione della forma

$$x_p(t) = c_1(t)\mathrm{e}^t \cos t + c_2(t)\mathrm{e}^t \operatorname{sen} t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con c_1 e c_2 funzioni di classe C^1 in $\mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} c_1'(t)x_1(t) + c_2'(t)x_2(t) = 0 \\ c_1'(t)x_1'(t) + c_2'(t)x_2'(t) = \mathrm{e}^t \cos^2 t \operatorname{sen}^2 t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Deve quindi essere

$$\begin{cases} c_1'(t)\mathrm{e}^t \cos t + c_2'(t)\mathrm{e}^t \operatorname{sen} t = 0 \\ c_1'(t)\left[\mathrm{e}^t \cos t - \mathrm{e}^t \operatorname{sen} t\right] + c_2'(t)\left[\mathrm{e}^t \operatorname{sen} t + \mathrm{e}^t \cos t\right] = \mathrm{e}^t \cos^2 t \operatorname{sen}^2 t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R},$$

da cui segue

$$\begin{cases} c_1'(t)\cos t + c_2'(t)\operatorname{sen} t = 0 \\ -c_1'(t)\operatorname{sen} t + c_2'(t)\cos t = \cos^2 t \operatorname{sen}^2 t \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} c_1'(t) = -\cos^2 t \operatorname{sen}^3 t \\ c_2'(t) = \cos^3 t \operatorname{sen}^2 t \end{cases}$$

per ogni t. Integrando, si trova (a meno di costanti arbitrarie)

$$c_1(t) = \frac{1}{3}\cos^3 t - \frac{1}{5}\cos^5 t \qquad \text{e} \qquad c_2(t) = \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 t - \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 t$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$ da cui segue

$$x_p(t) = \frac{1}{3}\left(\cos^4 t + \operatorname{sen}^4 t\right)\mathrm{e}^t - \frac{1}{5}\left(\cos^6 t + \operatorname{sen}^6 t\right)\mathrm{e}^t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono le funzioni

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^t \cos t + C_2\mathrm{e}^t \operatorname{sen} t + \frac{1}{3}\left(\cos^4 t + \operatorname{sen}^4 t\right)\mathrm{e}^t - \frac{1}{5}\left(\cos^6 t + \operatorname{sen}^6 t\right)\mathrm{e}^t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
Alternativamente, si ha $\cos^2 t \operatorname{sen}^2 t = [1 - \cos(4t)]/8$ per ogni t e quindi si può cercare direttamente una soluzione dell'equazione completa nella forma

$$x_p(t) = A\mathrm{e}^t + B\mathrm{e}^t \cos(4t) + C\mathrm{e}^t \operatorname{sen}(4t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $A, B, C \in \mathbb{R}$ costanti da determinare. Sostituendo nell'equazione, si trova $A = 1/8$, $B = 1/120$ e $C = 0$ che coincide con la soluzione $x_p(t)$ trovata sopra (anche se sembrano diverse).
(b) Tenendo conto di (a), scegliamo le costanti $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ in modo che risulti $x(0) = x'(0) = 0$. Si ha

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + 2/15 = 0 \\ x'(0) = C_1 + C_2 + 2/15 = 0 \end{cases}$$

da cui segue $C_1 = -2/15$ e $C_2 = 0$. La soluzione cercata è dunque la funzione

$$x(t) = -\frac{2}{15}\mathrm{e}^t \cos t + \frac{1}{3}\left(\cos^4 t + \operatorname{sen}^4 t\right)\mathrm{e}^t - \frac{1}{5}\left(\cos^6 t + \operatorname{sen}^6 t\right)\mathrm{e}^t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$
