

COGNOME _____ NOME _____ MATRICOLA _____ LAUREA CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC	NON SCRIVERE QUI <table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 20px; height: 20px;">1</td> <td style="width: 20px; height: 20px;">2</td> <td style="width: 20px; height: 20px;">3</td> <td style="width: 20px; height: 20px;">4</td> <td style="width: 20px; height: 20px;">5</td> </tr> </table> <div style="border: 1px solid black; width: 100px; height: 100px; margin: 10px auto;"></div>	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5		

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA
 DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA
 ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI
 A.A. 2024-2025 — PARMA, 2 LUGLIO 2025

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Calcolate la lunghezza della curva piana $\gamma: [0, 2\pi] \rightarrow \mathbb{R}^2$ di equazione polare $\rho(\theta) = \theta^2$, $\theta \in [0, 2\pi]$.

Soluzione. La curva γ è liscia e si ha

$$\|\gamma'(\theta)\| = \sqrt{[\rho(\theta)]^2 + [\rho'(\theta)]^2} = \sqrt{\theta^4 + 4\theta^2}, \quad \theta \in [0, 2\pi],$$

da cui segue

$$\begin{aligned}
 L(\gamma) &= \int_0^{2\pi} \|\gamma'(\theta)\| d\theta = \int_0^{2\pi} \sqrt{\theta^4 + 4\theta^2} d\theta = \\
 &= \frac{1}{2} \int_0^{4\pi^2} \sqrt{4+u} du = \frac{1}{3} (4+u)^{3/2} \Big|_0^{4\pi^2} = \frac{8}{3} \left[(1+\pi^2)^{3/2} - 1 \right].
 \end{aligned}$$

Esercizio 2. Calcolate il seguente limite:

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{\text{sen}(x^2y)}{2x^2 - xy + y^2}.$$

Soluzione. Risulta

$$2x^2 - xy + y^2 \geq 2x^2 - (x^2 + y^2)/2 + y^2 = x^2 + y^2/2 \geq (x^2 + y^2)/2$$

per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e quindi la funzione

$$f(x, y) = \frac{\text{sen}(x^2y)}{2x^2 - xy + y^2}, \quad (x, y) \in \mathbb{R}^2 \setminus \{(0, 0)\},$$

di cui si chiede di calcolare il limite è ben definita al di fuori dell'origine che è punto di accumulazione per il dominio. Ricordando che risulta $|\text{sen } t| \leq |t|$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, si ha

$$0 \leq |f(x, y)| \leq \frac{x^2|y|}{2x^2 - xy + y^2} \leq 2 \frac{x^2|y|}{x^2 + y^2}, \quad (x, y) \neq (0, 0)$$

e quindi, tenendo conto che per gli esponenti di x e y a numeratore e denominatore della frazione a destra risulta $1 + 1/2 = 3/2 > 1$, si ha

$$\lim_{(x,y) \rightarrow (0,0)} \frac{x^2y}{x^2 + y^2} = 0$$

per un risultato noto. Pertanto, il limite proposto esiste ed è uguale a zero per il criterio del confronto.

Esercizio 3. Calcolate la distanza del punto $P = (0, 0, 1/4)$ dall'ellissoide

$$\Sigma = \{(x, y, z) : x^2 + 2y^2 + z^2 = 1\}.$$

Soluzione. La distanza di P dal punto di coordinate (x, y, z) è la radice quadrata della funzione

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z - 1/4)^2, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

e quindi la distanza $d_\Sigma(P)$ di P dall'ellissoide Σ è la radice quadrata del minimo globale di f su Σ . Tale minimo esiste per il teorema di Weierstrass poiché la funzione f è continua e l'ellissoide Σ è compatto, essendo chiuso in quanto insieme degli zeri del polinomio $\Phi(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 1$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, e ovviamente limitato. Inoltre, l'ellissoide Σ è una 2-superficie regolare in \mathbb{R}^3 poiché il gradiente di Φ si annulla solo nell'origine che ovviamente non appartiene a Σ . È quindi possibile determinare il minimo globale di f su Σ con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Il sistema dei moltiplicatori di Lagrange è dato da

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda x = 0 \\ 2y - 4\lambda y = 0 \\ 2(z - 1/4) - 2\lambda z = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} (1 - \lambda)x = 0 \\ (1 - 2\lambda)y = 0 \\ (1 - \lambda)z = 1/4 \end{cases}$$

cui va aggiunta l'equazione che esprime l'appartenenza del punto di coordinate (x, y, z) a Σ .

Chiaramente, dalla terza equazione si ricava che deve essere $\lambda \neq 1$ e quindi dalla prima equazione si conclude che deve essere $x = 0$ mentre dalla seconda equazione si deduce che deve essere $\lambda = 1/2$ oppure $y = 0$. Se è $x = 0$ e $\lambda = 1/2$, deve essere $z = 1/2$ e dall'equazione che definisce Σ si ottiene $y = \pm\sqrt{3/8}$. Se invece è $x = 0$ e $y = 0$, deve essere $z = 1/[4(1 - \lambda)]$ e dall'equazione che definisce Σ si ottiene

$$\frac{1}{16(1 - \lambda)^2} = 1 \implies \lambda = 3/4 \text{ o } \lambda = 5/4$$

da cui segue $z = 1$ o $z = -1$.

Siano quindi $Q_\pm = (0, \pm\sqrt{3/8}, 1/2)$ e $R_\pm = (0, 0, \pm 1)$ i punti così trovati. Si ha

$$f(Q_\pm) = 7/16; \quad f(R_-) = 9/16; \quad f(R_+) = 25/16;$$

e quindi si conclude che i punti di Σ a distanza minima da P sono i punti Q_\pm e che la corrispondente distanza è $d_\Sigma(P) = \sqrt{7}/4$.

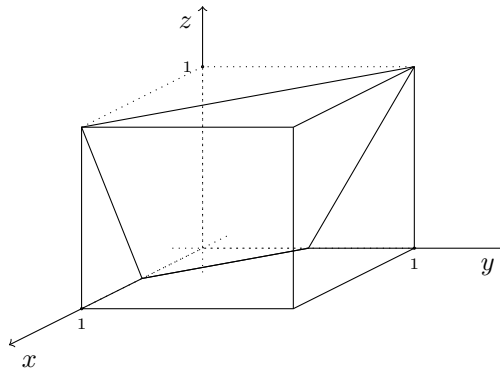
Esercizio 4. Sia

$$K = \{(x, y, z) : 0 \leq x, y, z \leq 1 \text{ e } 2x + 2y - z \geq 1\}.$$

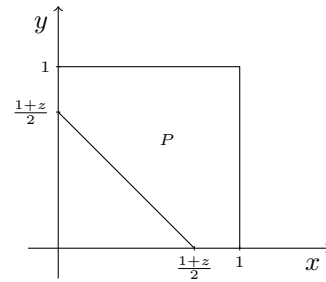
(a) Descrivete e disegnate l'insieme K .

(b) Calcolate $I = \int_K z d(x, y, z)$.

Soluzione. (a) L'insieme K è il poliedro formato dai punti del cubo unitario $Q = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ che stanno al di sotto del piano $2x + 2y - z = 1$. Esso è rappresentato in Figura (1).



(1)



(2)

(b) L'insieme K è chiuso in quanto intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni lineari ed è evidentemente limitato poiché contenuto nel cubo unitario Q . Pertanto K è compatto e quindi (Lebesgue) misurabile. Inoltre, la funzione $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto z$ è lineare e quindi è integrabile su ogni insieme compatto.

Calcoliamo l'integrale di f su K mediante la formula di riduzione per strati. La proiezione di K sull'asse z è l'intervallo $\pi_z(K) = [0, 1]$ e le corrispondenti sezioni sono i poligoni

$$P = K^z = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1 \text{ e } y \geq (1+z)/2 - x\}$$

(Figura (2)). Per la formula di riduzione si ha allora

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_P z d(x, y) \right) dz = \int_0^1 z |K^z| dz = \int_0^1 z \left[1 - \frac{(1+z)^2}{8} \right] dz = \\ &= \frac{1}{8} \int_0^1 (7z - 2z^2 - z^3) dz = \dots = \frac{31}{96}. \end{aligned}$$

Esercizio 5. Determinate la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = [x(t)]^2 - x(t) - 2 \\ x(0) = -2. \end{cases}$$

Soluzione. L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili. La funzione a secondo membro è $f(t, x) = g(t)h(x)$ con

$$g(t) = 1, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad h(x) = x^2 - x - 2 = (x + 1)(x - 2), \quad x \in \mathbb{R}.$$

La funzione h è infinite volte derivabile in \mathbb{R} e quindi il problema di Cauchy considerato ha soluzione massimale $x \in C^\infty(\alpha, \beta)$ con $-\infty \leq \alpha < 0 < \beta \leq +\infty$. Tale soluzione è prolungamento di ogni altra soluzione del medesimo problema di Cauchy.

Poiché la funzione h si annulla solo in $x = -1$ e $x = 2$, la soluzione massimale del problema di Cauchy considerato verifica la condizione $x(t) < -1$ per ogni $t \in (\alpha, \beta)$. Si ha quindi

$$\frac{x'(t)}{[x(t)]^2 - x(t) - 2} = 1, \quad \alpha < t < \beta,$$

cosicché, ponendo

$$\begin{aligned} H(y) &= \int_{-2}^y \frac{1}{z^2 - z - 2} dz = \frac{1}{3} \int_{-2}^y \left(\frac{1}{z-2} - \frac{1}{z+1} \right) dz = \\ &= \frac{1}{3} \log \left(\frac{z-2}{z+1} \right) \Big|_{-2}^y = \frac{1}{3} \log \left(\frac{y-2}{y+1} \right) - \frac{1}{3} \log 4, \quad y < -1, \end{aligned}$$

si deduce che la funzione composta $H \circ x$ è in $C^\infty(\alpha, \beta)$ e verifica $(H \circ x)'(t) = 1$ per $\alpha < t < \beta$ e $H \circ x(0) = 0$. Dunque, per il teorema fondamentale del calcolo, deve essere $(H \circ x)(t) = t$ per $\alpha < t < \beta$ da cui segue con semplici calcoli

$$x(t) = -\frac{4e^{3t} + 2}{4e^{3t} - 1} = -\left(1 + \frac{3}{4e^{3t} - 1} \right), \quad \alpha < t < \beta.$$

Poiché si ha

$$\begin{aligned} \lim_{y \rightarrow -\infty} H(y) &= \lim_{y \rightarrow -\infty} \left\{ \frac{1}{3} \log \left(\frac{z-2}{z+1} \right) - \log \sqrt[3]{4} \right\} = -\log \sqrt[3]{4}; \\ \lim_{y \rightarrow -1^-} H(y) &= \lim_{y \rightarrow -1^-} \left\{ \frac{1}{3} \log \left(\frac{z-2}{z+1} \right) - \log \sqrt[3]{4} \right\} = +\infty; \end{aligned}$$

si conclude che risulta

$$\alpha = -\log \sqrt[3]{4} \quad \text{e} \quad \beta = +\infty.$$

La soluzione massimale è dunque

$$x(t) = -\frac{4e^{3t} + 2}{4e^{3t} - 1} = -\left(1 + \frac{3}{4e^{3t} - 1} \right), \quad t > -\log \sqrt[3]{4}.$$
