

COGNOME _____ NOME _____ MATRICOLA _____ LAUREA CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC	NON SCRIVERE QUI <table border="1" style="margin: auto; border-collapse: collapse;"> <tr> <td style="width: 20px; height: 20px;">1</td> <td style="width: 20px; height: 20px;">2</td> <td style="width: 20px; height: 20px;">3</td> <td style="width: 20px; height: 20px;">4</td> <td style="width: 20px; height: 20px;">5</td> </tr> </table> <div style="border: 1px solid black; width: 100px; height: 100px; margin: 10px auto;"></div>	1	2	3	4	5
1	2	3	4	5		

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA
 DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA
 ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI
 A.A. 2024-2025 — PARMA, 17 GIUGNO 2025

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Determinate per quali $a \in \mathbb{R}$ risulta

$$2x^2 + y^2 + z^2 + 2xy - 2xz + 2ayz > 0$$

per ogni $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

Soluzione. Occorre determinare i numeri $a \in \mathbb{R}$ per i quali la forma quadratica q_S associata alla matrice simmetrica

$$S = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 1 & a \\ -1 & a & 1 \end{pmatrix}$$

è positiva in \mathbb{R}^3 al di fuori dell'origine e ciò accade se e solo se tutti gli autovalori di S sono positivi. Poiché i determinanti delle sottomatrici disposte lungo la diagonale principale sono $\Delta_1 = 2$, $\Delta_2 = 2$ e $\Delta_3 = -2a(a + 1)$, la matrice S ha autovalori positivi per $-1 < a < 0$ per il criterio di Sylvester. Per $a < -1$ o $a > 0$ la matrice S ha un autovalore negativo cosicché esiste una retta lungo la quale la forma quadratica è negativa al di fuori dell'origine e, analogamente, per $a = -1$ o $a = 0$ la matrice S ha (almeno) un autovalore nullo cosicché esiste una retta lungo la quale la forma quadratica è identicamente nulla.

Esercizio 2. Determinate $k \neq 0$ in modo che tutte le soluzioni $x(t)$ dell'equazione differenziale

$$x''(t) + 2x'(t) + (1 + k^2)x(t) = 10$$

siano tali che $x(t) \rightarrow 2$ per $t \rightarrow +\infty$.

Soluzione. L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 2\lambda + (1 + k^2) = (\lambda + 1)^2 + k^2 = 0$ che, essendo $k \neq 0$ per ipotesi, ha soluzioni complesse e coniugate date da $\lambda_{\pm} = -1 \pm ki$. Quindi, le funzioni

$$x_1(t) = e^{-t} \cos(kt); \quad x_2(t) = e^{-t} \sin(kt);$$

con $t \in \mathbb{R}$ sono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e chiaramente la funzione $x_p(t) = 10/(1 + k^2)$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ è una soluzione dell'equazione completa. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione proposta sono le funzioni

$$x(t) = C_1 e^{-t} \cos(kt) + C_2 e^{-t} \sin(kt) + \frac{10}{1 + k^2}, \quad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ ($i = 1, 2$) costanti arbitrarie. Indipendentemente dalla scelta delle costanti C_1 e C_2 e del parametro k , il limite di $x(t)$ per $t \rightarrow +\infty$ esiste e risulta $x(t) \rightarrow 10/(1 + k^2)$ per $t \rightarrow +\infty$. Deve quindi essere $10/(1 + k^2) = 2$ ovvero $k = \pm 2$.

Esercizio 3. Sia

$$\Gamma = \{(x, y, z) : x^2 + y^2 + z^2 = 3 \text{ e } 2x + 2y - z = 3\}.$$

- (a) Provate che Γ è una curva regolare e compatta di \mathbb{R}^3 .
- (b) Determinate il massimo ed il minimo globale di $f(x, y, z) = x + y - z$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, su Γ .

Soluzione. (a) Sia $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ la funzione di componenti $\Phi = (\Phi^1, \Phi^2)$ definite da

$$\Phi^1(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 3 \quad \text{e} \quad \Phi^2(x, y, z) = 2x + 2y - z - 3$$

per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ cosicché risulta $\Gamma = \Phi^{-1}(\{(0, 0)\})$. Si ha

$$D\Phi(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2 & 2 & -1 \end{pmatrix}, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

e quindi risulta $\text{rk } D\Phi(x, y, z) \leq 1$ se e solo se tutti i minori di ordine due della matrice $D\Phi(x, y, z)$ sono nulli ovvero si ha $4x - 4y = -2x - 4z = -2y - 4z = 0$. Le uniche soluzioni di questo sistema sono date da $x = y$ e $z = -x/2 = -y/2$ e nessun punto di coordinate $(t, t, -t/2)$ con $t \in \mathbb{R}$ appartiene a Γ . Quindi, l'insieme Γ è una 1-varietà di \mathbb{R}^3 . Inoltre, l'insieme Γ è evidentemente chiuso poiché controimmagine dell'origine mediante Φ , oltre a essere ovviamente limitato poiché contenuto nella sfera di \mathbb{R}^3 di centro nell'origine e raggio $\sqrt{3}$. Pertanto, l'insieme Γ è compatto.

(b) La funzione f assume minimo e massimo globale su Γ per il teorema di Weierstrass. Poiché Γ è una curva regolare, in tali punti deve essere $\nabla f \in \text{span}\{\nabla\Phi^1, \nabla\Phi^2\}$ ovvero deve aversi

$$\det \begin{pmatrix} 2x & 2y & 2z \\ 2 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix} = 2(y - x) = 0 \quad \iff \quad x = y.$$

Determiniamo quindi i punti di Γ con $x = y$. Si ha

$$x = y \implies \begin{cases} 2x^2 + z^2 = 3 \\ 4x - z = 3 \end{cases} \implies \begin{cases} 2x^2 + (4x - 3)^2 = 3 \\ z = 4x - 3 \end{cases} \implies \begin{cases} 3x^2 - 4x + 1 = 0 \\ z = 4x - 3 \end{cases}$$

da cui segue $x = 1/3$ o $x = 1$ cui corrispondono i punti di coordinate

$$P = (1/3, 1/3, -5/3) \quad \text{e} \quad Q = (1, 1, 1).$$

Si ha con facili calcoli

$$f(P) = 7/3 \quad \text{e} \quad f(Q) = 1$$

e quindi si conclude che il massimo globale di f su Γ è assunto nel punto P mentre il minimo globale è assunto nel punto Q .

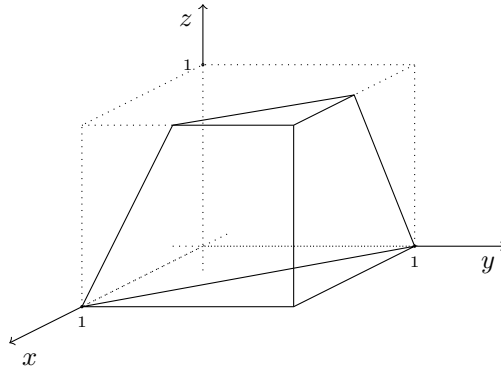
Esercizio 4. Sia

$$K = \{(x, y, z) : 0 \leq x, y, z \leq 1 \text{ e } 2x + 2y - z \geq 2\}.$$

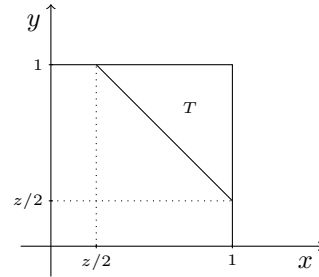
(a) Descrivete e disegnate l'insieme K .

(b) Calcolate $I = \int_K z d(x, y, z)$.

Soluzione. (a) L'insieme K è il poliedro formato dai punti del cubo unitario $Q = [0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$ che stanno al di sotto del piano $2x + 2y - z = 2$. Esso è rappresentato in Figura (1).



(1)



(2)

(b) L'insieme K è chiuso in quanto intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni lineari ed è evidentemente limitato poiché contenuto nel cubo unitario Q . Pertanto K è compatto e quindi (Lebesgue) misurabile. Inoltre, la funzione $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto z$ è lineare e quindi è integrabile su ogni insieme compatto.

Calcoliamo l'integrale di f su K mediante la formula di riduzione per strati. La proiezione di K sull'asse z è l'intervallo $\pi_z(K) = [0, 1]$ e le corrispondenti sezioni sono i triangoli

$$T = K^z = \{(x, y) : 0 \leq x, y \leq 1 \text{ e } y \geq (1 + z/2) - x\},$$

(Figura (2)). Per la formula di riduzione si ha allora

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \left(\int_T z d(x, y) \right) dz = \int_0^1 z |K^z| dz = \int_0^1 \frac{z}{2} \left(1 - \frac{z}{2}\right)^2 dz = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(\frac{z^3}{4} - z^2 + z \right) dz = \dots = \frac{11}{96}. \end{aligned}$$

Esercizio 5. Determinate la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = [x(t) - 1]^{3/2} \\ x(0) = 2. \end{cases}$$

Soluzione. L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili. La funzione a secondo membro è $f(t, x) = g(t)h(x)$ con

$$g(t) = 1, \quad t \in \mathbb{R} \quad \text{e} \quad h(x) = (x - 1)^{3/2}, \quad x > 1.$$

In tale intervallo la funzione h è infinite volte derivabile e quindi il problema di Cauchy considerato ha soluzione massimale $x \in C^\infty(\alpha, \beta)$ con $-\infty \leq \alpha < 0 < \beta \leq +\infty$. Tale soluzione è prolungamento di ogni altra soluzione del medesimo problema di Cauchy.

Poiché la funzione h è definita solo nell'intervallo $(1, +\infty)$, la soluzione massimale del problema di Cauchy considerato verifica la condizione $x(t) > 1$ per ogni $t \in (\alpha, \beta)$. Si ha quindi

$$\frac{x'(t)}{[x(t) - 1]^{3/2}} = 1, \quad \alpha < t < \beta,$$

cosicché, ponendo

$$H(y) = \int_2^y \frac{1}{(z - 1)^{3/2}} dz = -2(z - 1)^{-1/2} \Big|_2^y = 2 - \frac{2}{\sqrt{y - 1}}, \quad y > 1,$$

si deduce che la funzione composta $H \circ x$ è in $C^\infty(\alpha, \beta)$ e verifica $(H \circ x)'(t) = 1$ per $\alpha < t < \beta$ e $H \circ x(0) = 0$. Dunque, per il teorema fondamentale del calcolo, deve essere $(H \circ x)(t) = t$ per $\alpha < t < \beta$ da cui segue con semplici calcoli

$$x(t) = 1 + \left(\frac{2}{2 - t} \right)^2, \quad \alpha < t < \beta.$$

Poiché si ha

$$\lim_{y \rightarrow 1^+} H(y) = \lim_{y \rightarrow 1^+} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{y - 1}} \right) = -\infty \quad \text{e} \quad \lim_{y \rightarrow +\infty} H(y) = \lim_{y \rightarrow +\infty} \left(2 - \frac{2}{\sqrt{y - 1}} \right) = 2,$$

si conclude che risulta

$$\alpha = -\infty \quad \text{e} \quad \beta = 2.$$

La soluzione massimale è dunque

$$x(t) = 1 + \left(\frac{2}{2 - t} \right)^2, \quad t < 2.$$
