Cognome	________________	Non scrivere qui
Nome	________________	1 2 3 4 5
Matricola	________	
Laurea	Civ Amb Gest Inf Eln Tlc Mec	

Università degli Studi di Parma

Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Esame di Analisi Matematica 2 — Soluzioni

A.A. 2023-2024 — Parma, 16 Aprile 2025

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Calcolate la lunghezza L della curva parametrica $\gamma(t) = \log(\cos t)e_1 + te_2$, $t \in [0, \pi/4]$.

Soluzione. La curva γ è liscia e risulta

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{\tan^2 t + 1} = \frac{1}{\cos t}, \qquad t \in [0, \pi/4].$$

La lunghezza di γ è quindi data da

$$L = \int_0^{\pi/4} \frac{1}{\cos t}\, dt = \int_0^{\pi/4} \frac{\cos t}{1 - \operatorname{sen}^2 t}\, dt =$$

cosicché, procedendo per sostituzione ponendo $x = \operatorname{sen} t$, si ha infine

$$= \int_0^{1/\sqrt{2}} \frac{1}{1-x^2}\, dx = \frac{1}{2}\log\left(\frac{1+x}{1-x}\right)\Bigg|_0^{1/\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\log\left(\frac{\sqrt{2}+1}{\sqrt{2}-1}\right) = \log\left(\sqrt{2}+1\right).$$

Esercizio 2. Determinate la funzione $g \in C^1(\mathbb{R})$ per la quale il campo vettoriale $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ di componenti $f = (f^1, f^2)$ definite da

$$\begin{cases} f^1(x, y) = x^2(y^3 + 3y^2/2) \\ f^2(x, y) = g(x)(y^2 + y) \end{cases} \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

risulta conservativo in $\mathbb{R}^2$ e, data la curva parametrica $\gamma(t) = (\cos t)e_1 + (\operatorname{sen} t)e_2$, $t \in [-\pi/2, \pi/2]$, risulta

$$\int_\gamma f\, dl = \frac{2}{3}.$$

Soluzione. Essendo $\mathbb{R}^2$ convesso, il campo vettoriale f è conservativo in $\mathbb{R}^2$ se e solo se è irrotazionale in $\mathbb{R}^2$ ovvero se e solo se risulta $f^1_y(x, y) = f^2_x(x, y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Deve dunque essere

$$3x^2(y^2 + y) = f^1_y(x, y) = f^2_x(x, y) = g'(x)(y^2 + y) \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

da cui segue che deve essere $g'(x) = 3x^2$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ ovvero $g(x) = x^3 + c$, $x \in \mathbb{R}$, con $c \in \mathbb{R}$ costante arbitraria. Per tali funzioni g il potenziale del campo vettoriale f che si annula nell'origine è dato da

$$F(x, y) = \int_0^x f^1(t, 0)\, dt + \int_0^y f^2(x, t)\, dt = \int_0^y (x^3 + c)(t^2 + t)\, dt = (x^3 + c)(y^3/3 + y^2/2)$$

per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e, essendo $\gamma(-\pi/2) = (0, -1)$ e $\gamma(\pi/2) = (0, 1)$, si ha

$$\int_\gamma f\, dl = F(0, 1) - F(0, -1) = 2c/3$$

da cui segue che deve essere $c = 1$. La funzione g cercata è quindi $g(x) = x^3 + 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Sia

$$f(x,y,z) = 2\log(x+2y) - 2yz - z^2 - x + 6z, \qquad (x,y,z) \in D.$$

Determinate

(a) il dominio D di f;

(b) i punti critici di f e la loro natura.

Soluzione. (a) La funzione f è evidentemente definita nell'insieme

$$D = \big\{(x,y,z):\ x+2y>0\big\}$$

che è uno dei due semispazi aperti individuati dal piano di $\mathbb{R}^3$ di equazione $x+2y=0$.
(b) La funzione f è di classe C^∞ nell'insieme aperto D. Le derivate parziali di f sono date da

$$f_x(x,y,z) = \frac{2}{x+2y} - 1; \qquad f_y(x,y,z) = \frac{4}{x+2y} - 2z; \qquad f_z(x,y,z) = -2y + 6 - 2z;$$

per ogni $(x,y,z) \in D$ e quindi i punti critici sono le soluzioni x,y,z con $x+2y>0$ del sistema formato dalle equazioni

$$\begin{cases} \dfrac{2}{x+2y} - 1 = 0 \\ \dfrac{4}{x+2y} - 2z = 0 \\ -2y+6-2z = 0. \end{cases} \qquad \iff \qquad \begin{cases} x+2y = 2 \\ z(x+2y) = 2 \\ y+z = 3. \end{cases}$$

Dalle prime due equazioni si ricava che deve essere $z=1$ e quindi dalla terza e dalla prima segue $y=2$ e $x=-2$. Risulta $(-2,2,,1) \in D$ e quindi il punto P di coordinate $P=(-2,2,,1)$ è (l'unico) punto critico di f.
Le derivate seconde di f sono date da

$$\begin{aligned}
&f_{xx}(x,y,z) = -\frac{2}{(x+2y)^2}; \qquad f_{yx}(x,y,z) = -\frac{4}{(x+2y)^2}; \qquad f_{zx}(x,y,z) = 0;\\
&f_{yy}(x,y,z) = -\frac{8}{(x+2y)^2}; \qquad f_{zy}(x,y,z) = -2;\\
&f_{zz}(x,y,z) = -2;
\end{aligned}$$

per ogni $(x,y,z) \in D$ e quindi la matrice hessiana di f in P è

$$D^2 f(-2,2,1) = \begin{pmatrix} -1/2 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix}.$$

Poiché i determinanti delle sottomatrici disposte lungo la diagonale principale sono $\Delta_1 = -1/2$, $\Delta_2 = 0$ e $\Delta_3 = 2$, dal criterio di Sylvester si conclude che la matrice hessiana $D^2 f(P)$ ha due autovalori di segno discorde e quindi che il punto critico P è un punto di sella di f.

Esercizio 4. Sia

$$K = \left\{(x, y, z) : \; x^2 + y^2 \le 4 \text{ e } \max\left\{0, 1 - (x^2 + y^2)\right\} \le z \le 1\right\}.$$

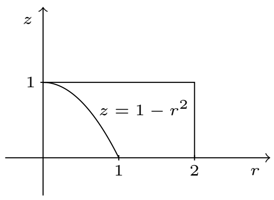
(a) Descrivete l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K z^2 \, d(x, y, z)$.

Soluzione. L'insieme K è il solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la figura contenuta nel primo quadrante del piano rz (con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$) definita dalle disuguaglianze

$$\max\{0, 1 - r^2\} \le z \le 1 \qquad \text{e} \qquad 0 \le r \le 2$$

come illustrato nella figura sotto.



La proiezione di K sull'asse z è l'intervallo $[0, 1]$ e le corrispondenti sezioni sono le corone circolari

$$K^z = \left\{(x, y) : \; \sqrt{1 - z} \le \sqrt{x^2 + y^2} \le 2\right\}, \qquad 0 \le z \le 1,$$

e quindi, integrando per strati, dalla formula di riduzione risulta

$$I = \int_0^1 z^2 |K^z| \, dz = \int_0^1 \pi z^2 \left[4 - (1 - z)\right] \, dz = \pi \int_0^1 \left(3z^2 + z^3\right) dz = \cdots = \frac{5}{4}\pi.$$

Esercizio 5. Data l'equazione differenziale

$$x''(t) + x'(t) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^t},$$

determinate

(a) tutte le soluzioni $x(t)$ dell'equazione differenziale;

(b) la soluzione $x(t)$ tale che $x(0) = x'(0) = 0$.

Soluzione. (a) L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + \lambda = \lambda(\lambda + 1) = 0$ le cui soluzioni sono date da $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = -1$. Quindi, le funzioni

$$x_1(t) = 1; \qquad x_2(t) = \mathrm{e}^{-t};$$

con $t \in \mathbb{R}$ sono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e si può procedere alla ricerca di una soluzione dell'equazione completa con il metodo di variazione delle costanti arbitrarie cercando una soluzione della forma

$$x_p(t) = c_1(t) + c_2(t)\mathrm{e}^{-t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con c_1 e c_2 funzioni di classe C^1 in $\mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} c_1'(t)x_1(t) + c_2'(t)x_2(t) = 0 \\ c_1'(t)x_1'(t) + c_2'(t)x_2'(t) = \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^t} \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Deve quindi essere

$$\begin{cases} c_1'(t) + c_2'(t)\mathrm{e}^{-t} = 0 \\ -\, c_2'(t)\mathrm{e}^{-t} = \dfrac{1}{1 + \mathrm{e}^t} \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R},$$

da cui segue facilmente

$$c_1'(t) = \frac{1}{1 + \mathrm{e}^t} \qquad \text{e} \qquad c_2'(t) = -\frac{\mathrm{e}^t}{1 + \mathrm{e}^t}$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$. Integrando, si trova (a meno di costanti arbitrarie)

$$c_1(t) = \int \frac{1}{1 + \mathrm{e}^t}\, dt = \int \frac{\mathrm{e}^t}{\mathrm{e}^t(1 + \mathrm{e}^t)}\, dt = \int \frac{1}{x(1 + x)}\, dx\Big|_{x = \mathrm{e}^t} = \int \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{1 + x}\right) dx\Big|_{x = \mathrm{e}^t} = \log\left(\frac{\mathrm{e}^t}{1 + \mathrm{e}^t}\right);$$

$$c_2(t) = -\int \frac{\mathrm{e}^t}{1 + \mathrm{e}^t}\, dt = -\log(1 + \mathrm{e}^t);$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$ da cui segue

$$x_p(t) = \log\left(\frac{\mathrm{e}^t}{1 + \mathrm{e}^t}\right) - \mathrm{e}^{-t}\log(1 + \mathrm{e}^t) = t - \left(1 + \mathrm{e}^{-t}\right)\log(1 + \mathrm{e}^t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono le funzioni

$$x(t) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{-t} + t - \left(1 + \mathrm{e}^{-t}\right)\log(1 + \mathrm{e}^t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.

(b) Tenendo conto di (a), scegliamo le costanti $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ in modo che risulti $x(0) = x'(0) = 0$. Si ha

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + C_2 - 2\log 2 = 0 \\ x'(0) = -C_2 + \log 2 = 0 \end{cases}$$

da cui segue $C_1 = C_2 = \log 2$. La soluzione cercata è dunque la funzione

$$x(t) = \left(1 + \mathrm{e}^{-t}\right)\log\frac{2}{1 + \mathrm{e}^t} + t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$