COGNOME	______________________	NON SCRIVERE QUI
NOME	______________________	1 2 3 4 5
MATRICOLA	└┴┴┴┴┴┘	
LAUREA	CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC	

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

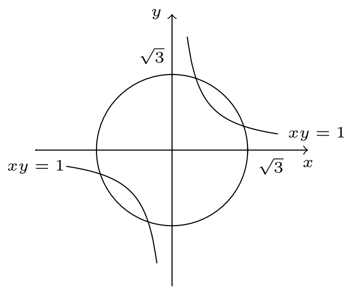
ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI

A.A. 2023-2024 — PARMA, 6 FEBBRAIO 2025

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Sia $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 3 \text{ e } xy > 1\}$. Disegnate l'insieme A e stabilite, giustificando la risposta, quale delle seguenti affermazioni è falsa: (a) A non ha punti isolati; (b) A ha un asse di simmetria; (c) A è chiuso.

Soluzione. L'insieme A è rappresentato nella figura seguente.



Chiaramente, l'insieme A non ha punti isolati e le rette $y = \pm x$ sono assi di simmetria di A. Inoltre, i punti dell'arco di iperbole $xy = 1$ nel primo quadrante compresi tra i punti di coordinate

$$P = ((3 - \sqrt{5})/2, (3 + \sqrt{5})/2) \qquad \text{e} \qquad Q = ((3 + \sqrt{5})/2, (3 - \sqrt{5})/2)$$

e i corrispondenti punti sull'altro arco di iperbole nel terzo quadrante sono punti di accumulazione di A che non appartnegono ad A. Pertanto, l'insieme A non è chiuso e quindi l'affermazione falsa è la (c).

Esercizio 2. Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ il campo di vettori conservativo con la seguente proprietà: per ogni punto $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, l'integrale curvilineo di f lungo una qualunque curva liscia γ con punto iniziale $(\pi/2, 1, 0)$ e punto finale (x, y, z) è uguale a

$$\int_\gamma f \cdot dl = x\mathrm{e}^{yz} \operatorname{sen}(x + z) - \pi/2.$$

Calcolate $f(\pi/2, 1, 0)$.

Soluzione. La proprietà di cui gode il campo conservativo $f = (f^1, f^2, f^3)$ equivale a dire che la funzione

$$F(x, y, z) = x\mathrm{e}^{yz} \operatorname{sen}(x + z) - \pi/2, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

ne è un potenziale. Risulta quindi $\partial_n F(x, y, z) = f^n(x, y, z)$ per ogni (x, y, z) $(n = 1, 2, 3)$ da cui segue con facili calcoli

$$\begin{aligned}
f^1(\pi/2, 1, 0) &= \partial_x F(\pi/2, 1, 0) = \mathrm{e}^{yz} [\operatorname{sen}(x + z) + x \cos(x + z)]\big|_{x=\pi/2, y=1, z=0} = 1; \\
f^2(\pi/2, 1, 0) &= \partial_y F(\pi/2, 1, 0) = xz\mathrm{e}^{yz} \operatorname{sen}(x + z)\big|_{x=\pi/2, y=1, z=0} = 0; \\
f^3(\pi/2, 1, 0) &= \partial_z F(\pi/2, 1, 0) = x\mathrm{e}^{yz} [y \operatorname{sen}(x + z) + \cos(x + z)]\big|_{x=\pi/2, y=1, z=0} = \pi/2.
\end{aligned}$$

Esercizio 3. Sia
$$f(x,y,z) = x + 2\sqrt{2}y + 2\sqrt{3}z, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Determinate gli estremi globali di f sull'insieme
$$K = \left\{(x,y,z) :\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 \le 1\right\}.$$

(b) Determinate l'immagine $f(K)$.

Soluzione. (a) L'insieme K è compatto: infatti, esso è chiuso, essendo definito come controimmagine dell'intervallo chiuso $(-\infty, 0]$ mediante il polinomio
$$\Phi(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$
ed è limitato poiché, da
$$(x,y,z) \in K \qquad \Longrightarrow \qquad x^2 + y^2 + z^2 \le x^2 + 2y^2 + 3z^2 \le 1,$$
segue che K è contenuto nella palla unitaria di centro nell'origine. Pertanto, la funzione f, essendo lineare, assume minimo e massimo globale su K per il teorema di Weierstrass e quindi, essendo il gradiente della funzione lineare f non nullo, deve assumere gli estremi globali sul bordo di ∂K.
Il bordo di K è l'insieme
$$\Sigma = \left\{(x,y,z) :\ x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1\right\}$$
che è una $2-$superficie regolare in $\mathbb{R}^3$ poiché il gradiente della funzione Φ che lo definisce si annulla solo nell'origine, punto che non appartiene a Σ. Pertanto, gli estremi globali di f su Σ possono essere determinati con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.
Il sistema dei moltiplicatori di Lagrange è dato da
$$\begin{cases} 1 - 2\lambda x = 0 \\ 2\sqrt{2} - 4\lambda y = 0 \\ 2\sqrt{3} - 6\lambda z = 0 \end{cases}$$
cui va aggiunta l'equazione che esprime l'appartenenza del punto di coordinate (x,y,z) a Σ.
Chiaramente, deve essere $\lambda \neq 0$ da cui segue
$$x = \frac{1}{2\lambda}; \qquad y = \frac{1}{\sqrt{2}\lambda}; \qquad z = \frac{1}{\sqrt{3}\lambda};$$
cosicché, sostituendo nell'equazione che definisce Σ, si trova
$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{9}{4\lambda^2} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = \pm\frac{3}{2}$$
cui corrispondono i due punti $P_\pm = (\pm 1/3, \pm\sqrt{2}/3, \pm 2/(3\sqrt{3}))$. Risulta
$$f(\pm 1/3, \pm\sqrt{2}/3, \pm 2/(3\sqrt{3})) = \pm 3$$
che sono necessariamente il minimo e il massimo globale di f su Σ e quindi anche su K.
(b) L'insieme K è evidentemente connesso per poligonali: due punti qualunque di K, rispettivamente di coordinate (x_0, y_0, z_0) e (x,y,z), sono collegati dalla poligonale contenuta in K formata dall'incollamento dei tre segmenti $[(x_0,y_0,z_0),(0,0,z_0)]$, $[(0,0,z_0),(0,0,z)]$ e $[(0,0,z),(x,y,z)]$. Pertanto, l'insieme K è connesso e quindi, per il teorema dei valori intermedi, la funzione lineare f assume in K tutti i valori compresi tra il minimo e il massimo globale ovvero risulta
$$f(K) = [-3, 3].$$

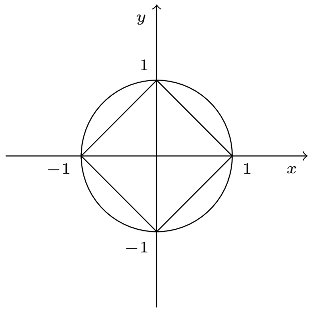
Esercizio 4. Sia

$$K = \{(x, y, z) : |x| + |y| \le 1 \text{ e } 0 \le z \le 1 - x^2 - y^2\}.$$

(a) Descrivete l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \int_K x^2 \, d(x, y, z)$.

Soluzione. L'insieme K è formato dai punti di coordinate (x, y, z) compresi tra il paraboloide a sezione circolare di equazione $z = 1 - x^2 - y^2$ e il piano $z = 0$ la cui proiezione sul piano $z = 0$ è contenuta nel quadrato Q definito da $|x| + |y| \le 1$. Tale quadrato è iscritto nel cerchio di equazione $x^2 + y^2 = 1$ che è l'intersezione tra il paraboloide e il piano $z = 0$. L'insieme K ha quindi la forma di una tenda con pianta quadrata Q picchettata a quota $z = 0$ nei quattro vertici di Q di coordinate $(\pm 1, 0)$ e $(0, \pm 1)$.



L'insieme K è compatto perché è limitato ($|x| \le 1$, $|y| \le 1$ e $0 \le z \le 1$) ed è intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue e quindi è (Lebesgue) misurabile. Inoltre, la funzione

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x^2$$

è un polinomio e quindi è integrabile su ogni insieme compatto.
Calcoliamo l'integrale I mediante la formula di riduzione per fili. Per la definizione di K risulta

$$(x, y, z) \in K \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} |x| + |y| \le 1 \\ x^2 + y^2 \le 1 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad x^2 + y^2 \le |x| + |y| \le 1$$

e quindi la proiezione di K sul piano xy è il quadrato

$$Q = \{(x, y) : |x| + |y| \le 1\}$$

rappresentato nella figura precedente e, per ogni $(x, y) \in Q$, la corrispondente sezione è l'intervallo

$$[0, 1 - (x^2 + y^2)].$$

Per la formula di riduzione, tenendo conto delle evidenti simmetrie, si ha allora

$$\begin{aligned} I = \int_K x^2 \, d(x, y, z) &= \int_Q \left(\int_0^{1-x^2-y^2} x^2 \, dz \right) d(x, y) = \\ &= \int_Q x^2 \left(1 - x^2 - y^2\right) d(x, y) = \\ &= 4 \int_0^1 \left(\int_0^{1-x} \left[x^2 - x^4 - x^2 y^2\right] dx \right) dy = \\ &= 4 \int_0^1 \left(x^2(1 - x) - x^4(1 - x) - \frac{1}{3} x^2 (1 - x)^3 \right) dx = \\ &= 4 \int_0^1 \left(\frac{4}{3} x^5 - 2x^4 + \frac{2}{3} x^2 \right) dx = \cdots = \frac{8}{45}. \end{aligned}$$

Esercizio 5. Data l'equazione differenziale

$$x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = \mathrm{e}^{2t} \cos t \operatorname{sen} t,$$

determinate

(a) tutte le soluzioni $x(t)$ dell'equazione differenziale;

(b) la soluzione $x(t)$ tale che $x(0) = x'(0) = 0$.

Soluzione. (a) L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = (\lambda - 2)^2 + 1 = 0$ le cui soluzioni complesse e coniugate sono date da $\lambda_\pm = 2 \pm i$. Quindi, le funzioni

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{2t} \cos t; \qquad x_2(t) = \mathrm{e}^{2t} \operatorname{sen} t;$$

con $t \in \mathbb{R}$ sono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e si può procedere alla ricerca di una soluzione dell'equazione completa con il metodo di variazione delle costanti arbitrarie cercando una soluzione della forma

$$x_p(t) = c_1(t)\mathrm{e}^{2t} \cos t + c_2(t)\mathrm{e}^{2t} \operatorname{sen} t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con c_1 e c_2 funzioni di classe C^1 in $\mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} c_1'(t)x_1(t) + c_2'(t)x_2(t) = 0 \\ c_1'(t)x_1'(t) + c_2'(t)x_2'(t) = \mathrm{e}^{2t} \cos t \operatorname{sen} t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Deve quindi essere

$$\begin{cases} c_1'(t)\mathrm{e}^{2t} \cos t + c_2'(t)\mathrm{e}^{2t} \operatorname{sen} t = 0 \\ c_1'(t) \left[\mathrm{e}^{2t} \cos t - \mathrm{e}^{2t} \operatorname{sen} t\right] + c_2'(t) \left[2\mathrm{e}^{2t} \operatorname{sen} t + \mathrm{e}^{2t} \cos t\right] = \mathrm{e}^{2t} \cos t \operatorname{sen} t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R},$$

da cui segue

$$\begin{cases} c_1'(t) \cos t + c_2'(t) \operatorname{sen} t = 0 \\ -c_1'(t) \operatorname{sen} t + c_2'(t) \cos t = \cos t \operatorname{sen} t \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} c_1'(t) = -\cos t \operatorname{sen}^2 t \\ c_2'(t) = \cos^2 t \operatorname{sen} t \end{cases}$$

per ogni t. Integrando, si trova (a meno di costanti arbitrarie)

$$c_1(t) = -\frac{1}{3} \operatorname{sen}^3 t \qquad \text{e} \qquad c_2(t) = -\frac{1}{3} \cos^3 t$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$ da cui segue

$$x_p(t) = -\frac{1}{3}\mathrm{e}^{2t} \operatorname{sen}^3 t \cos t - \frac{1}{3}\mathrm{e}^{2t} \cos^3 t \operatorname{sen} t = -\frac{1}{6}\mathrm{e}^{2t} \operatorname{sen}(2t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono le funzioni

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{2t} \cos t + C_2\mathrm{e}^{2t} \operatorname{sen} t - \frac{1}{6}\mathrm{e}^{2t} \operatorname{sen}(2t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
Alternativamente, essendo $\mathrm{e}^{2t} \cos t \operatorname{sen} t = \mathrm{e}^{2t} \operatorname{sen}(2t)/2$ per ogni t, si può cercare direttamente una soluzione dell'equazione completa nella forma

$$x_p(t) = A\mathrm{e}^{2t} \cos(2t) + B\mathrm{e}^{2t} \operatorname{sen}(2t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $A, B \in \mathbb{R}$ costanti da determinare. Sostituendo nell'equazione, si trova $A = 0$ e $B = -1/6$ e quindi la stessa soluzione $x_p(t)$ trovata sopra.
(b) Tenendo conto di (a), scegliamo le costanti $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ in modo che risulti $x(0) = x'(0) = 0$. Si ha

$$\begin{cases} x(0) = C_1 = 0 \\ x'(0) = 2C_1 + C_2 - 1/3 = 0 \end{cases}$$

da cui segue $C_1 = 0$ e $C_2 = 1/3$. La soluzione cercata è dunque la funzione

$$x(t) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{2t} \operatorname{sen} t - \frac{1}{6}\mathrm{e}^{2t} \operatorname{sen}(2t) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{2t} \operatorname{sen} t \left(1 - \cos t\right), \qquad t \in \mathbb{R}.$$