

COGNOME \_\_\_\_\_  
 NOME \_\_\_\_\_  
 MATRICOLA \_\_\_\_\_  
 LAUREA CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC

NON SCRIVERE QUI

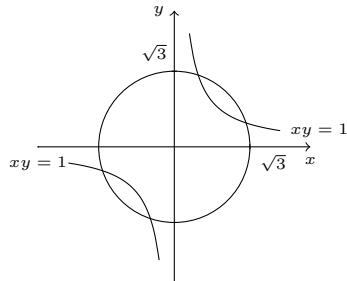
1	2	3	4	5
---	---	---	---	---

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA  
 DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA  
 ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI  
 A.A. 2023-2024 — PARMA, 6 FEBBRAIO 2025

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

**Esercizio 1.** Sia  $A = \{(x, y) : x^2 + y^2 \leq 3 \text{ e } xy > 1\}$ . Disegnate l'insieme  $A$  e stabilite, giustificando la risposta, quale delle seguenti affermazioni è falsa: (a)  $A$  non ha punti isolati; (b)  $A$  ha un asse di simmetria; (c)  $A$  è chiuso.

**Soluzione.** L'insieme  $A$  è rappresentato nella figura seguente.



Chiaramente, l'insieme  $A$  non ha punti isolati e le rette  $y = \pm x$  sono assi di simmetria di  $A$ . Inoltre, i punti dell'arco di iperbole  $xy = 1$  nel primo quadrante compresi tra i punti di coordinate

$$P = ((3 - \sqrt{5})/2, (3 + \sqrt{5})/2) \quad \text{e} \quad Q = ((3 + \sqrt{5})/2, (3 - \sqrt{5})/2)$$

e i corrispondenti punti sull'altro arco di iperbole nel terzo quadrante sono punti di accumulazione di  $A$  che non appartengono ad  $A$ . Pertanto, l'insieme  $A$  non è chiuso e quindi l'affermazione falsa è la (c).

**Esercizio 2.** Sia  $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$  il campo di vettori conservativo con la seguente proprietà: per ogni punto  $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ , l'integrale curvilineo di  $f$  lungo una qualunque curva liscia  $\gamma$  con punto iniziale  $(\pi/2, 1, 0)$  e punto finale  $(x, y, z)$  è uguale a

$$\int_{\gamma} f \cdot dl = xe^{yz} \sin(x+z) - \pi/2.$$

Calcolate  $f(\pi/2, 1, 0)$ .

**Soluzione.** La proprietà di cui gode il campo conservativo  $f = (f^1, f^2, f^3)$  equivale a dire che la funzione

$$F(x, y, z) = xe^{yz} \sin(x+z) - \pi/2, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

ne è un potenziale. Risulta quindi  $\partial_n F(x, y, z) = f^n(x, y, z)$  per ogni  $(x, y, z)$  ( $n = 1, 2, 3$ ) da cui segue con facili calcoli

$$f^1(\pi/2, 1, 0) = \partial_x F(\pi/2, 1, 0) = e^{yz} [\sin(x+z) + x \cos(x+z)]|_{x=\pi/2, y=1, z=0} = 1;$$

$$f^2(\pi/2, 1, 0) = \partial_y F(\pi/2, 1, 0) = xze^{yz} \sin(x+z)|_{x=\pi/2, y=1, z=0} = 0;$$

$$f^3(\pi/2, 1, 0) = \partial_z F(\pi/2, 1, 0) = xe^{yz} [y \sin(x+z) + \cos(x+z)]|_{x=\pi/2, y=1, z=0} = \pi/2.$$

---

**Esercizio 3.** Sia

$$f(x, y, z) = x + 2\sqrt{2}y + 2\sqrt{3}z, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Determinate gli estremi globali di  $f$  sull'insieme

$$K = \{(x, y, z) : x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1\}.$$

(b) Determinate l'immagine  $f(K)$ .

---

**Soluzione.** (a) L'insieme  $K$  è compatto: infatti, esso è chiuso, essendo definito come controimmagine dell'intervallo chiuso  $(-\infty, 0]$  mediante il polinomio

$$\Phi(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2 - 1, \quad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

ed è limitato poiché, da

$$(x, y, z) \in K \implies x^2 + y^2 + z^2 \leq x^2 + 2y^2 + 3z^2 \leq 1,$$

segue che  $K$  è contenuto nella palla unitaria di centro nell'origine. Pertanto, la funzione  $f$ , essendo lineare, assume minimo e massimo globale su  $K$  per il teorema di Weierstrass e quindi, essendo il gradiente della funzione lineare  $f$  non nullo, deve assumere gli estremi globali sul bordo di  $\partial K$ .

Il bordo di  $K$  è l'insieme

$$\Sigma = \{(x, y, z) : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 1\}$$

che è una 2-superficie regolare in  $\mathbb{R}^3$  poiché il gradiente della funzione  $\Phi$  che lo definisce si annulla solo nell'origine, punto che non appartiene a  $\Sigma$ . Pertanto, gli estremi globali di  $f$  su  $\Sigma$  possono essere determinati con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.

Il sistema dei moltiplicatori di Lagrange è dato da

$$\begin{cases} 1 - 2\lambda x = 0 \\ 2\sqrt{2} - 4\lambda y = 0 \\ 2\sqrt{3} - 6\lambda z = 0 \end{cases}$$

cui va aggiunta l'equazione che esprime l'appartenenza del punto di coordinate  $(x, y, z)$  a  $\Sigma$ .

Chiaramente, deve essere  $\lambda \neq 0$  da cui segue

$$x = \frac{1}{2\lambda}; \quad y = \frac{1}{\sqrt{2}\lambda}; \quad z = \frac{1}{\sqrt{3}\lambda};$$

cosicché, sostituendo nell'equazione che definisce  $\Sigma$ , si trova

$$\frac{1}{4\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} + \frac{1}{\lambda^2} = 1 \implies \frac{9}{4\lambda^2} = 1 \implies \lambda = \pm \frac{3}{2}$$

cui corrispondono i due punti  $P_{\pm} = (\pm 1/3, \pm \sqrt{2}/3, \pm 2/(3\sqrt{3}))$ . Risulta

$$f(\pm 1/3, \pm \sqrt{2}/3, \pm 2/(3\sqrt{3})) = \pm 3$$

che sono necessariamente il minimo e il massimo globale di  $f$  su  $\Sigma$  e quindi anche su  $K$ .

(b) L'insieme  $K$  è evidentemente connesso per poligonali: due punti qualunque di  $K$ , rispettivamente di coordinate  $(x_0, y_0, z_0)$  e  $(x, y, z)$ , sono collegati dalla poligonale contenuta in  $K$  formata dall'incollamento dei tre segmenti  $[(x_0, y_0, z_0), (0, 0, z_0)]$ ,  $[(0, 0, z_0), (0, 0, z)]$  e  $[(0, 0, z), (x, y, z)]$ . Pertanto, l'insieme  $K$  è connesso e quindi, per il teorema dei valori intermedi, la funzione lineare  $f$  assume in  $K$  tutti i valori compresi tra il minimo e il massimo globale ovvero risulta

$$f(K) = [-3, 3].$$

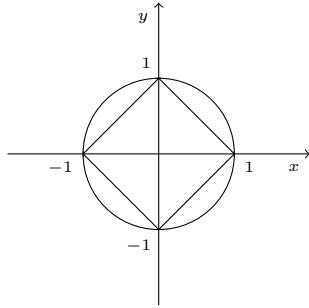
**Esercizio 4.** Sia

$$K = \{(x, y, z) : |x| + |y| \leq 1 \text{ e } 0 \leq z \leq 1 - x^2 - y^2\}.$$

(a) Descrivete l'insieme  $K$ .

(b) Calcolate  $I = \int_K x^2 d(x, y, z)$ .

**Soluzione.** L'insieme  $K$  è formato dai punti di coordinate  $(x, y, z)$  compresi tra il paraboloide a sezione circolare di equazione  $z = 1 - x^2 - y^2$  e il piano  $z = 0$  la cui proiezione sul piano  $z = 0$  è contenuta nel quadrato  $Q$  definito da  $|x| + |y| \leq 1$ . Tale quadrato è iscritto nel cerchio di equazione  $x^2 + y^2 = 1$  che è l'intersezione tra il paraboloide e il piano  $z = 0$ . L'insieme  $K$  ha quindi la forma di una tenda con pianta quadrata  $Q$  picchettata a quota  $z = 0$  nei quattro vertici di  $Q$  di coordinate  $(\pm 1, 0)$  e  $(0, \pm 1)$ .



L'insieme  $K$  è compatto perché è limitato ( $|x| \leq 1, |y| \leq 1$  e  $0 \leq z \leq 1$ ) ed è intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue e quindi è (Lebesgue) misurabile. Inoltre, la funzione

$$(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x^2$$

è un polinomio e quindi è integrabile su ogni insieme compatto.

Calcoliamo l'integrale  $I$  mediante la formula di riduzione per fili. Per la definizione di  $K$  risulta

$$(x, y, z) \in K \implies \begin{cases} |x| + |y| \leq 1 \\ x^2 + y^2 \leq 1 \end{cases} \implies x^2 + y^2 \leq |x| + |y| \leq 1$$

e quindi la proiezione di  $K$  sul piano  $xy$  è il quadrato

$$Q = \{(x, y) : |x| + |y| \leq 1\}$$

rappresentato nella figura precedente e, per ogni  $(x, y) \in Q$ , la corrispondente sezione è l'intervallo

$$[0, 1 - (x^2 + y^2)].$$

Per la formula di riduzione, tenendo conto delle evidenti simmetrie, si ha allora

$$\begin{aligned} I &= \int_K x^2 d(x, y, z) = \int_Q \left( \int_0^{1-x^2-y^2} x^2 dz \right) d(x, y) = \\ &= \int_Q x^2 (1 - x^2 - y^2) d(x, y) = \\ &= 4 \int_0^1 \left( \int_0^{1-x} [x^2 - x^4 - x^2 y^2] dx \right) dy = \\ &= 4 \int_0^1 \left( x^2(1-x) - x^4(1-x) - \frac{1}{3} x^2 (1-x)^3 \right) dx = \\ &= 4 \int_0^1 \left( \frac{4}{3} x^5 - 2x^4 + \frac{2}{3} x^2 \right) dx = \dots = \frac{8}{45}. \end{aligned}$$

---

**Esercizio 5.** Data l'equazione differenziale

$$x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = e^{2t} \cos t \sin t,$$

determinate

- (a) tutte le soluzioni  $x(t)$  dell'equazione differenziale;
- (b) la soluzione  $x(t)$  tale che  $x(0) = x'(0) = 0$ .

---

**Soluzione.** (a) L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è  $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = (\lambda - 2)^2 + 1 = 0$  le cui soluzioni complesse e coniugate sono date da  $\lambda_{\pm} = 2 \pm i$ . Quindi, le funzioni

$$x_1(t) = e^{2t} \cos t; \quad x_2(t) = e^{2t} \sin t;$$

con  $t \in \mathbb{R}$  sono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e si può procedere alla ricerca di una soluzione dell'equazione completa con il metodo di variazione delle costanti arbitrarie cercando una soluzione della forma

$$x_p(t) = c_1(t)e^{2t} \cos t + c_2(t)e^{2t} \sin t, \quad t \in \mathbb{R},$$

con  $c_1$  e  $c_2$  funzioni di classe  $C^1$  in  $\mathbb{R}$  tali che

$$\begin{cases} c'_1(t)x_1(t) + c'_2(t)x_2(t) = 0 \\ c'_1(t)x'_1(t) + c'_2(t)x'_2(t) = e^{2t} \cos t \sin t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R}.$$

Deve quindi essere

$$\begin{cases} c'_1(t)e^{2t} \cos t + c'_2(t)e^{2t} \sin t = 0 \\ c'_1(t)[2e^{2t} \cos t - e^{2t} \sin t] + c'_2(t)[2e^{2t} \sin t + e^{2t} \cos t] = e^{2t} \cos t \sin t \end{cases} \quad t \in \mathbb{R},$$

da cui segue

$$\begin{cases} c'_1(t) \cos t + c'_2(t) \sin t = 0 \\ -c'_1(t) \sin t + c'_2(t) \cos t = \cos t \sin t \end{cases} \implies \begin{cases} c'_1(t) = -\cos t \sin^2 t \\ c'_2(t) = \cos^2 t \sin t \end{cases}$$

per ogni  $t$ . Integrando, si trova (a meno di costanti arbitrarie)

$$c_1(t) = -\frac{1}{3} \sin^3 t \quad \text{e} \quad c_2(t) = -\frac{1}{3} \cos^3 t$$

per ogni  $t \in \mathbb{R}$  da cui segue

$$x_p(t) = -\frac{1}{3} e^{2t} \sin^3 t \cos t - \frac{1}{3} e^{2t} \cos^3 t \sin t = -\frac{1}{6} e^{2t} \sin(2t), \quad t \in \mathbb{R}.$$

Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono le funzioni

$$x(t) = C_1 e^{2t} \cos t + C_2 e^{2t} \sin t - \frac{1}{6} e^{2t} \sin(2t), \quad t \in \mathbb{R},$$

con  $C_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2$ ) costanti arbitrarie.

Alternativamente, essendo  $e^{2t} \cos t \sin t = e^{2t} \sin(2t)/2$  per ogni  $t$ , si può cercare direttamente una soluzione dell'equazione completa nella forma

$$x_p(t) = A e^{2t} \cos(2t) + B e^{2t} \sin(2t), \quad t \in \mathbb{R},$$

con  $A, B \in \mathbb{R}$  costanti da determinare. Sostituendo nell'equazione, si trova  $A = 0$  e  $B = -1/6$  e quindi la stessa soluzione  $x_p(t)$  trovata sopra.

(b) Tenendo conto di (a), scegliamo le costanti  $C_i \in \mathbb{R}$  ( $i = 1, 2$ ) in modo che risulti  $x(0) = x'(0) = 0$ . Si ha

$$\begin{cases} x(0) = C_1 = 0 \\ x'(0) = 2C_1 + C_2 - 1/3 = 0 \end{cases}$$

da cui segue  $C_1 = 0$  e  $C_2 = 1/3$ . La soluzione cercata è dunque la funzione

$$x(t) = \frac{1}{3} e^{2t} \sin t - \frac{1}{6} e^{2t} \sin(2t) = \frac{1}{3} e^{2t} \sin t (1 - \cos t), \quad t \in \mathbb{R}.$$