COGNOME	______________________	NON SCRIVERE QUI	
NOME	______________________	1 2 3 4 5	
MATRICOLA	|_|_|_|_|_|_|		
LAUREA	CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC		

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI

A.A. 2023-2024 — PARMA, 22 NOVEMBRE 2024

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Calcolate l'integrale curvilineo

$$I = \int_\gamma (5x + \sqrt{y} + 18z)\, dl(x, y, z)$$

ove $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ è la curva parametrica definita da

$$\gamma(t) = te_1 + t^2 e_2 + 2t^3/3, \qquad t \in [0,1].$$

Soluzione. Poiché la curva parametrica γ è liscia e la funzione $f(x, y, z) = 5x + \sqrt{y} + 18$, $(x, y) \in \mathbb{R}^3$ e $y \geq 0$ è continua, risulta

$$I = \int_\gamma f\, dl = \int_0^1 f(t, t^2, t^3/3)\|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^1 (6t + 12t^3)\sqrt{1 + 4t^2 + 4t^4}\, dt =$$
$$= \int_0^1 6t\left(1 + 2t^2\right)^2\, dt = \frac{1}{2}\left(1 + 2t^2\right)^3\Big|_0^1 = 13.$$

Esercizio 2. Determinate tutte le funzioni $g \in C^1(\mathbb{R})$ per le quali il campo vettoriale $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ di componenti $f = (f^1, f^2)$ definite da

$$\begin{cases} f^1(x, y) = xg(y) \\ f^2(x, y) = x^2 y \end{cases} \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

risulta conservativo in $\mathbb{R}^2$ e per tali funzioni g determinate il potenziale di f che si annulla nell'origine.

Soluzione. Essendo $\mathbb{R}^2$ convesso, il campo vettoriale f è conservativo in $\mathbb{R}^2$ se e solo se è irrotazionale in $\mathbb{R}^2$ ovvero se e solo se risulta $f^1_y(x, y) = f^2_x(x, y)$ per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. Deve dunque essere

$$xg'(y) = f^1_y(x, y) = f^2_x(x, y) = 2xy \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

da cui segue che deve essere $g'(y) = 2y$ per ogni $y \in \mathbb{R}$ ovvero $g(y) = y^2 + c$, $y \in \mathbb{R}$ con $c \in \mathbb{R}$ costante arbitraria. Per tali funzioni g il potenziale del campo vettoriale f che si annula nell'origine è dato da

$$F(x, y) = \int_0^x f^1(t, 0)\, dt + \int_0^y f^2(x, t)\, dt = \int_0^x ct\, dt + \int_0^y x^2 t\, dt = \frac{1}{2}cx^2 + \frac{1}{2}x^2y^2, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Esercizio 3. Sia
$$\Gamma = \left\{(x,y,z) :\ z+1/2 = x^2+y^2 \text{ e } x+y+z=1\right\}.$$

(a) Provate che Γ è una curva regolare e compatta di $\mathbb{R}^3$.

(b) Determinate il massimo ed il minimo globale di $f(x,y,z) = x^2+y-z$, $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$, su Γ.

Soluzione. (a) Sia $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$ la funzione di componenti $\Phi = \left(\Phi^1,\Phi^2\right)$ definite da
$$\Phi^1(x,y,z) = x^2+y^2-z-1/2 \qquad \text{e} \qquad \Phi^2(x,y,z) = x+y+z-1$$
per ogni $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ cosicché risulta $\Gamma = \Phi^{-1}(0,0)$. Si ha
$$D\Phi(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,$$
e quindi risulta $\operatorname{rk} D\Phi(x,y,z) \le 1$ se e solo se tutti i minori di ordine due della matrice $D\Phi(x,y,z)$ sono nulli ovvero si ha $2x-2y = 2x+1 = 2y+1 = 0$. L'unica soluzione di questo sistema è data da $x=y=-1/2$ cui non corrisponde alcun $z\in\mathbb{R}$ per cui si abbia $(1/2,1/2,z)\in\Gamma$. Quindi Γ è una $1-$varietà di $\mathbb{R}^3$. Inoltre, l'insieme Γ è evidentemente chiuso poiché controimmagine dell'origine mediante Φ e, per provare che è limitato, determiniamone la proiezione sul piano xy. Per $(x,y,z)\in\Gamma$ si ha $x^2+y^2 = z+1/2$ e $z = 1-(x+y)$ da cui segue
$$x^2+y^2 = 1-(x+y)+1/2 \qquad \Longrightarrow \qquad (x+1/2)^2+(y+1/2)^2 = 2.$$
La proiezione di Γ sul piano xy è quindi la circonferenza di centro $(-1/2,-1/2)$ e raggio $r=\sqrt{2}$. Conseguentemente le coordinate x e y dei punti (x,y,z) di Γ sono limitate e da $x^2+y^2 = z+1/2$ segue che anche z è limitato. Pertanto, l'insieme Γ oltre ad essere chiuso è limitato e quindi compatto.

(b) La funzione f assume minimo e massimo globale su Γ per il teorema di Weierstrass. In tali punti deve essere $\nabla f \in \operatorname{span}\left\{\nabla\Phi^1,\nabla\Phi^2\right\}$ ovvero deve aversi
$$\det\begin{pmatrix} 2x & 1 & 0 \\ -2x & -2y & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} = (1+2x)(1-2y) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x=-1/2 \text{ o } y = 1/2.$$
Determiniamo quindi i punti di Γ con $x=-1/2$ o $y=1/2$. Si ha
$$x=-1/2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} y^2 - z = 1/4 \\ y+z = 3/2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 4y^2+4y-7=0 \\ z = 3/2-y \end{cases}$$
da cui segue $y = 1/2\pm\sqrt{2}$ e $2\mp\sqrt{2}$ cui corrispondono i punti di coordinate
$$P_\pm = (-1/2,-1/2\pm\sqrt{2},2\mp\sqrt{2})$$
mentre nell'altro caso risulta
$$y=1/2 \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} x^2 - z = 1/4 \\ y+z = 1/2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 4x^2+4x-3=0 \\ z = 1/2-x \end{cases}$$
da cui segue $x=-3/2$ e $z=2$ oppure $x=1/2$ e $z=0$ cui corrispondono i punti di coordinate
$$Q_1 = (-3/2,1/2,2) \qquad \text{e} \qquad Q_2 = (1/2,1/2,0).$$
Si ha con facili calcoli
$$f(P_\pm) = -9/4\pm 2\sqrt{2} \qquad \text{e} \qquad f(Q_1) = f(Q_2) = 3/4$$
e quindi, tenuto conto che risulta $-9/4+2\sqrt{2} < 3/4$, si conclude che il minimo globale di f su Γ è assunto nel punto P_- mentre il massimo globale è assunto in entrambi i punti $Q-1$ e Q_2.

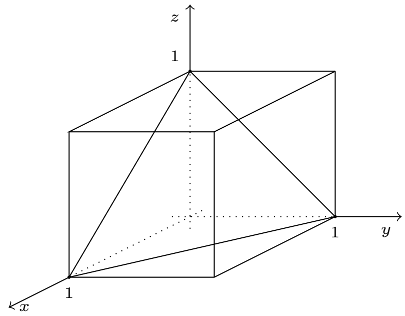
Esercizio 4. Sia

$$K = \{(x,y,z) : x+y+z \geq 1 \text{ e } 0 \leq x,y,z \leq 1\}.$$

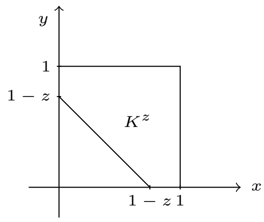
(a) Descrivete e disegnate l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \int_K z\, d(x,y,z)$.

Soluzione. (a) L'insieme K è il poliedro ottenuto prendendo la parte del cubo $[0,1]\times[0,1]\times[0,1]$ che sta al di sopra del piano di equazione $x+y+z=1$. Esso è rappresentato in Figura (1).



(1)



(2)

(b) L'insieme K è evidentemente compatto e quindi (Lebesgue) misurabile. Inoltre, la funzione

$$(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto z$$

è lineare e quindi è integrabile su ogni insieme compatto.
Calcoliamo l'integrale di f su K mediante la formula di riduzione per strati. La proiezione di K sull'asse z è l'intervallo $\pi_z(K) = [0,1]$ e le corrispondenti sezioni sono gli insiemi

$$K^z = \{(x,y) : 0 \leq x,y \leq 1 \text{ e } x+y \geq 1-z\}, \qquad z \in [0,1],$$

rappresentati in Figura (2). Per la formula di riduzione si ha allora

$$I = \int_0^1 \left(\int_{K^z} z\, d(x,y) \right) dz = \int_0^1 z|K^z|\, dz$$

e quindi, poiché per considerzioni di geometria elementari risulta evidentemente

$$|K^z| = 1 - \frac{1}{2}(1-z)^2$$

per ogni $z \in [0,1]$, si ha infine

$$I = \int_0^1 z\left\{1 - \frac{1}{2}(1-z)^2\right\} dz = \int_0^1 \left(\frac{z}{2} + z^2 - \frac{z^3}{2}\right) dz = \frac{z^2}{4} + \frac{z^3}{3} - \frac{z^4}{8}\Big|_0^1 = \cdots = \frac{11}{24}.$$

Esercizio 5. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = [x(t)]^2 - 2x(t) + 1 \\ x(0) = x_0 > 1, \end{cases}$$

detrminate

(a) la soluzione massimale corrispondente al dato iniziale $x_0 = 2$;

(b) per quali dati iniziali $x_0 > 1$ la soluzione massimale risulta definita per $t = 2$.

Soluzione. L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili. La funzione a secondo membro è $f(t,x) = g(t)h(x)$ con

$$g(t) = 1, \qquad t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad h(x) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)^2, \qquad x > 0.$$

In $\mathbb{R}$ la funzione h è infinite volte derivabile e quindi il problema di Cauchy con dato iniziale $x_0 \in \mathbb{R}$ ha soluzione massimale $x \in C^\infty(\alpha, \beta)$ con $\alpha = \alpha(x_0)$ e $\beta = \beta(x_0)$ tali che $-\infty \leq \alpha < 0 < \beta \leq +\infty$. Tale soluzione è prolungamento di ogni altra soluzione del medesimo problema di Cauchy.
Poiché la funione h si annulla solo per $x = 1$, la soluzione del medesimo problema di Cauchy con dato iniziale $x_0 = 1$ è la funzione costante $x(t) = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e quindi le soluzioni massimali dei problemi di Cauchy con dato iniziale $x_0 > 1$ verificano la condizione $x(t) > 1$ per ogni $t \in (\alpha, \beta)$.
Ponendo

$$H(y) = \int_{x_0}^{y} \frac{1}{(z-1)^2}\, dz = -\frac{1}{z-1}\bigg|_{x_0}^{y} = \frac{1}{x_0 - 1} - \frac{1}{y-1}, \qquad y > 1,$$

si deduce che la funzione composta $H \circ x$ è in $C^\infty(\alpha, \beta)$ e verifica $(H \circ x)'(t) = 1$ per $\alpha < t < \beta$ e $H \circ x(0) = x_0$. Dunque, per il teorema fondamentale del calcolo, deve essere $(H \circ x)(t) = t$ per $\alpha < t < \beta$ da cui segue con semplici calcoli

$$x(t) = 1 + \cfrac{1}{\cfrac{1}{x_0 - 1} - t}, \qquad \alpha < t < \beta.$$

Poiché si ha

$$\lim_{y \to 1^+} H(y) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{y \to +\infty} H(y) = \frac{1}{x_0 - 1},$$

si conclude che gli estremi dell'intervallo massimale di esistenza sono $\alpha(x_0) = -\infty$ e $\beta(x_0) = 1/(x_0 - 1)$ per ogni dato iniziale $x_0 > 1$.

(a) La soluzione massimale corrispondente al dato iniziale $x_0 = 2$ è dunque la funzione

$$x(t) = 1 + \frac{1}{1-t} = \frac{2-t}{1-t}, \qquad t < 1.$$

(b) Affinché la soluzione massimale del problema di Cauchy con dato iniziale $x_0 > 1$ sia definita per $t = 2$ deve essere

$$x_0 > 1 \text{ e } \frac{1}{x_0 - 1} > 2 \qquad \Longrightarrow \qquad 1 < x_0 < 3/2.$$