COGNOME ______________________

NOME ______________________

MATRICOLA

LAUREA CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI

A.A. 2023-2024 — PARMA, 10 SETTEMBRE 2024

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Scrivete l'equazione del piano tangente al grafico della funzione

$$f(x,y) = \arctan(x^2y^3), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

nel punto $P = (-1,1)$.

Soluzione. La funzione f è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^2$ e l'equazione del piano tangente al grafico di f in P è

$$z = f(-1,1) + f_x(-1,1)(x+1) + f_y(-1,1)(y-1).$$

Si ha $f(-1,1) = \arctan 1 = \pi/4$ e le derivate parziali di f sono

$$f_x(x,y) = \frac{2xy^3}{1+x^4y^6} \qquad \text{e} \qquad f_y(x,y) = \frac{3x^2y^2}{1+x^4y^6}$$

per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ da cui segue $f_x(-1,1) = -1$ e $f_y(-1,1) = 3/2$. Sostituendo nell'equazione del piano tangente risulta $z = \pi/4 - (x+1) + 3(y-1)/2$ ovvero $4x - 6y + 4z = \pi - 10$ che è l'equazione cercata.

Esercizio 2. Calcolate l'integrale curvilineo (lavoro) del campo vettoriale $f \colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ di componenti

$$f^1(x,y) = -x^3y \qquad \text{e} \qquad f^2(x,y) = xy^3$$

($(x,y) \in \mathbb{R}^2$) lungo la curva parametrica $\gamma \colon [0,\pi/2] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = (\cos t)e_1 + (\operatorname{sen} t)e_2, \qquad t \in [0,\pi/4].$$

Soluzione. Poiché il campo vettoriale f è continuo e la curva parametrica γ è liscia, risulta

$$\int_\gamma f\,dl = \int_0^{\pi/4} \langle f(\gamma(t)) \,|\, \gamma'(t)\rangle\,dt = \int_0^{\pi/4} \left[f^1(\cos t, \operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t) + f^2(\cos t, \operatorname{sen} t)(\cos t)\right]\,dt =$$

$$= \int_0^{\pi/4} \left[\cos^3 t \operatorname{sen}^2 t + \cos^2 t \operatorname{sen}^3 t\right]\,dt.$$

Si ha

$$\int \cos^3 t \operatorname{sen}^2 t\,dt = \int (\operatorname{sen}^2 t - \operatorname{sen}^4 t)\cos t\,dt = \int (x^2 - x^4)\,dx\Big|_{x=\operatorname{sen} t} = \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 t - \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 t + C;$$

$$\int \cos^2 t \operatorname{sen}^3 t\,dt = \int (\cos^2 t - \cos^4 t)\operatorname{sen} t\,dt = \int (x^4 - x^2)\,dx\Big|_{x=\cos t} = \frac{1}{5}\cos^5 t - \frac{1}{3}\cos^3 t + C;$$

da cui segue

$$\int_\gamma f\,dl = \left(\frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 t - \frac{1}{5}\operatorname{sen}^5 t\right)\Big|_0^{\pi/4} + \left(\frac{1}{5}\cos^5 t - \frac{1}{3}\cos^3 t\right)\Big|_0^{\pi/4} = \ldots = \frac{2}{15}.$$

Esercizio 3. Sia

$$f(x,y,z) = x^3 - xy^2 - y^2 + 2z^2 + 2xz - x - 2z, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Determinate gli eventuali punti critici di f e stabilitene la natura.

(b) Determinate l'immagine $f(\mathbb{R}^3)$.

Soluzione. (a) La funzione f è un polinomio e quindi è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Le derivate parziali di f sono date da

$$f_x(x,y,z) = 3x^2 - y^2 + 2z - 1; \qquad f_y(x,y,z) = -2xy - 2y; \qquad f_z(x,y,z) = 4z + 2x - 2;$$

per ogni (x,y,z) e quindi i punti critici sono le soluzioni del sistema formato dalle equazioni

$$\begin{cases} 3x^2 - y^2 + 2z = 1 \\ 2y(x+1) = 0 \\ x + 2z = 1. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava che deve essere $x = -1$ o $y = 0$. Nel primo caso si ha $z = 1$ e il sistema diviene

$$\begin{cases} x = -1 \\ z = 1 \\ y^2 - 2z = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} x = -1 \\ z = 1 \\ y^2 = 4 \end{cases}$$

da cui si ricavano i due punti critici $P_\pm = (-1, \pm 2, 1)$.
Per $y = 0$ il sistema diviene

$$\begin{cases} 3x^2 + z = 1 \\ x + 2z = 1 \end{cases} \iff \begin{cases} 3x^2 - x = 0 \\ x = 1 - 2z \end{cases} \iff \begin{cases} x(3x-1) = 0 \\ z = (1-x)/2 \end{cases}$$

da cui si ricavano i due punti critici $Q = (-0, 0, 1/2)$ e $R = (1/3, 0, 1/3)$.
Per determinare la natura dei punti critici, calcoliamo la matrice hessiana di f che è

$$D^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x & -2y & 2 \\ -2y & -2x-2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

per ogni (x,y,z). Posto

$$\Delta_m = \det\left((D^2 f)_h^k \right)_{1 \le h,k \le m}, \qquad m = 1,2,3,$$

si ha

$$D^2 f(P_\pm) = \begin{pmatrix} -6 & \mp 4 & 2 \\ \mp 4 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \Delta_1 = -6 \\ \Delta_2 = -16 \\ \Delta_3 = -64 \end{cases}$$

$$D^2 f(Q) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 2 \\ 0 & -2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \Delta_1 = 0 \\ \Delta_2 = -2 \\ \Delta_3 = 8 \end{cases}$$

$$D^2 f(R) = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 0 & -8/3 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \Delta_1 = 2 \\ \Delta_2 = -16/3 \\ \Delta_3 = 16/3. \end{cases}$$

e quindi in tutti i casi la matrice hessiana è invertibile e in nessun caso sono soddisfatte le condizioni del criterio di Sylvester per avere autovalori di segno costante. Conseguentemnte, tutti i punti critici sono punti di sella.
(b) Risulta

$$f(x,0,0) = x^3 - x \to \pm\infty \qquad \text{per } x \to \pm\infty$$

da cui segue $f(\mathbb{R}^3) = (-\infty, +\infty)$ per il teorema dei valori intermedi.

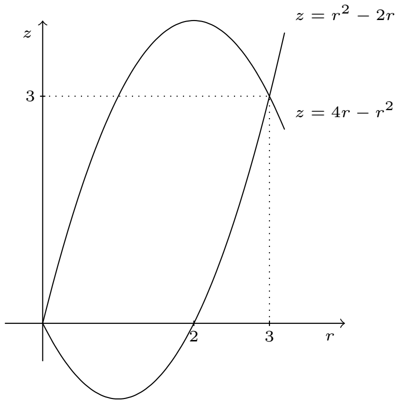
Esercizio 4. Sia

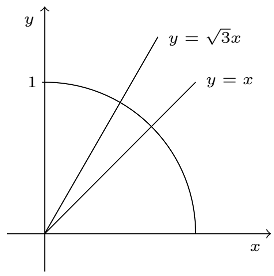
$$K = \left\{(x,y,z):\ x^2+y^2-2\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 4\sqrt{x^2+y^2}-x^2-y^2 \text{ e } x \le y \le \sqrt{3}x\right\}.$$

(a) Descrivete l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K xy\, d(x,y,z)$.

Soluzione. L'insieme K è l'intersezione della parte del poliedro definito dai piani $y = x$ e $y = \sqrt{3}x$ contenuta nel semispazio $x \ge 0$ con il solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la figura contenuta nel primo quadrante del piano rz (con $r = \sqrt{x^2+y^2}$) compresa tra le parabole di equazione $z = r^2 - 2r$ e $z = 4r - r^2$ come illustrato nella figura a sinistra.





L'insieme K è compatto perché è limitato ed è intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue e quindi è (Lebesgue) misurabile. La funzione $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto xy$ è un monomio e quindi è integrabile in K.
Calcoliamo l'integrale I mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione di K sul piano xy è l'insieme

$$\pi_{xy}(K) = \left\{(x,y):\ \sqrt{x^2+y^2} \le 3 \text{ e } 0 \le x \le y \le \sqrt{3}x\right\}$$

rappresentato nella figura a destra e per ogni $(x,y) \in \pi_{xy}(K)$ la corrispondente sezione è l'intervallo

$$K_{(x,y)} = \left[x^2+y^2-2\sqrt{x^2+y^2}, 4\sqrt{x^2+y^2}-x^2-y^2\right], \qquad (x,y) \in \pi_{xy}(K).$$

Per la formula di riduzione si ha allora

$$\begin{aligned} I = \int_K xy\, d(x,y,z) &= \int_{\pi_{xy}(K)} \left(\int_{(x^2+y^2)-2\sqrt{x^2+y^2}}^{4\sqrt{x^2+y^2}-(x^2+y^2)} xy\, dz \right) d(x,y) = \\ &= \int_{\pi_{xy}(K)} xy \left[6\sqrt{x^2+y^2} - 2(x^2+y^2)\right] d(x,y) = \end{aligned}$$

e quindi, utilizzando coordinate polari per calcolare l'integrale a destra, si ottiene

$$\begin{aligned} &= \left(\int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta \right) \cdot \left(\int_0^3 r^3 \left(6r - 2r^2\right) r\, dr \right) = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2\theta \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} \cdot 2 \left(\frac{3}{5} r^5 - \frac{1}{6} r^6 \right) \Big|_0^3 = \frac{1}{8} \cdot 2 \cdot \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{6} \right) 3^6 = \ldots = \frac{243}{40}. \end{aligned}$$

Esercizio 5. Considerate il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = 5\operatorname{sen} t + 2t \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$$

(a) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale.

(b) Determinate la soluzione del problema di Cauchy.

Soluzione. (a) L'equazione proposta è una equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è $\lambda^2+2\lambda+2=0$ le cui soluzioni complesse coniugate sono $\lambda = -1 \pm i$. Quindi, le funzioni

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{-t}\cos t; \qquad\qquad x_2(t) = \mathrm{e}^{-t}\operatorname{sen} t;$$

con $t \in \mathbb{R}$ sono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{-t}\cos t + C_2\mathrm{e}^{-t}\operatorname{sen} t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
Cerchiamo una soluzione dell'equazione completa della forma

$$x_p(t) = A\cos t + B\operatorname{sen} t + Ct + D, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ costanti da determinare. Si ha allora

$$x_p''(t) + 2x_p'(t) + 2x_p(t) = (A + 2B)\cos t + (B - 2A)\operatorname{sen} t + 2Ct + 2(C + D) = 5\operatorname{sen} t + 2t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

da cui segue $A = -2$, $B = 1$, $C = 1$ e $D = -1$. Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione completa sono le funzioni

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{-t}\cos t + C_2\mathrm{e}^{-t}\operatorname{sen} t - 2\cos t + \operatorname{sen} t + t - 1, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.

(b) Scegliamo le costanti $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ in modo che la soluzione $x(t)$ definita in (a) sia tale che $x(0) = 1$ e $x'(0) = -1$. Si ha

$$\begin{cases} x(0) = C_1 = 1 \\ x'(0) = C_1 + C_2 - 1 = -1 \end{cases}$$

da cui segue $C_1 = 3$ e $C_2 = 1$. La soluzione cercata è dunque la funzione

$$x(t) = \left(3\mathrm{e}^{-t} - 2\right)\cos t + \left(\mathrm{e}^{-t} + 1\right)\operatorname{sen} t + t - 1, \qquad t \in \mathbb{R}.$$