COGNOME	____________________	NON SCRIVERE QUI
NOME	____________________	1 2 3 4 5
MATRICOLA	|_|_|_|_|_|_|	
LAUREA	CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC	

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI

A.A. 2023-2024 — PARMA, 17 LUGLIO 2024

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Sia Γ la curva regolare di $\mathbb{R}^3$ ottenuta come intersezione tra l'ellissoide di equazione $4x^2 + y^2 + 2z^2 = 7$ e il piano di equazione $2x + y + z = 4$. Trovate le coordinate di un versore tangente alla curva Γ nel punto $P = (1, 1, 1)$.

Soluzione. La curva regolare Γ è l'insieme dei punti

$$\Gamma = \left\{(x, y, z) :\ 4x^2 + y^2 + 2z^2 = 7 \text{ e } 2x + y + z = 4\right\}.$$

Posto $\Phi^1(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + 2z^2 - 7$ e $\Phi^2(x, y, z) = 2x + y + z - 4$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, lo spazio tangente a Γ in $P = (1, 1, 1)$ è l'insieme

$$T_P\Gamma = \left\{v \in \mathbb{R}^3 :\ \langle \nabla\Phi^1(P) \,|\, v\rangle = \langle \nabla\Phi^2(P) \,|\, v\rangle = 0\right\}.$$

Si ha $\nabla\Phi^1(P) = (8, 2, 4)$ e $\nabla\Phi^2(P) = (2, 1, 1)$ e quindi, posto $v = (v_1, v_2, v_3)$, la condizione $v \in T_P\Gamma$ diviene

$$\begin{cases} \langle \nabla\Phi^1(P) \,|\, v\rangle = 0 \\ \langle \nabla\Phi^2(P) \,|\, v\rangle = 0 \end{cases} \qquad\iff\qquad \begin{cases} 8v_1 + 2v_2 + 4v_3 = 0 \\ 2v_1 + v_2 + v_3 = 0 \end{cases} \qquad\iff\qquad v_2 = 0 \text{ e } v_3 = -2v_1$$

I vettori v sono dunque i vettori di coordinate $v = (t, 0, -2t)$ $(t \in \mathbb{R})$ e quindi, normalizzando, si trovano i due versori

$$v = \pm \begin{pmatrix} 1/\sqrt{5} \\ 0 \\ -2/\sqrt{5} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Calcolate il lavoro L compiuto dal campo di vettori $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ di componenti

$$f^1(x, y, z) = xy; \qquad f^2(x, y, z) = yz; \qquad f^3(x, y, z) = zx;$$

per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ lungo l'arco parametrico $\gamma(t) = te_1 + t^2e_2 + t^3e_3$, $t \in [0, 1]$.

Soluzione. Si ha $\gamma'(t) = e_1 + 2te_2 + 3t^2e_3$ per ogni $t \in [0, 1]$ da cui segue

$$\langle f(\gamma(t)) \,|\, \gamma'(t)\rangle = t^3 + 2t^6 + 3t^6 = t^3 + 5t^6, \qquad t \in [0, 1],$$

e quindi risulta

$$L = \int_0^1 \langle f(\gamma(t)) \,|\, \gamma'(t)\rangle \, dt = \int_0^1 (t^3 + 5t^6)\, dt = \left(\frac{t^4}{4} + \frac{5t^7}{7}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4} + \frac{5}{7} = \frac{27}{28}.$$

Esercizio 3. Calcolate la distanza del punto $P = (0, 0, 4)$ dal paraboloide

$$\Sigma = \left\{(x, y, z) : \, z = x^2 + 2y^2\right\}.$$

Soluzione. La distanza di P dal punto di coordinate (x, y, z) è la radice quadrata della funzione

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + (z - 4)^2, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3.$$

e quindi la distanza $d_\Sigma(P)$ di P dal paraboloide Σ è la radice quadrata del minimo globale di f su Σ. Tale minimo esiste per il teorema di Weierstrass generalizzato poiché Σ è chiuso in quanto insieme degli zeri del polinomio $\Phi(x, y, z) = x^2 + 2y^2 - z$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ e

$$f(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - 8z + 16 \geq x^2 + y^2 + z^2 - \frac{z^2}{2} - 32 + 16 \geq \frac{1}{2}\left(x^2 + y^2 + z^2\right) - 16 \to +\infty$$

per $(x, y, z) \to \infty$). Inoltre, il paraboloide Σ è una $2-$superficie regolare in $\mathbb{R}^3$ poiché il gradiente di Φ non si annulla in alcun punto di $\mathbb{R}^3$. È quindi possibile determinare il minimo globale di f su Σ con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange.
Il sistema dei moltiplicatori di Lagrange è dato da

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda x = 0 \\ 2y - 4\lambda y = 0 \\ 2(z - 4) + \lambda = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} (1 - \lambda)x = 0 \\ (1 - 2\lambda)y = 0 \\ z = 4 - \lambda/2 \end{cases}$$

cui va aggiunta l'equazione che esprime l'appartenenza del punto a Σ.
Consideriamo quindi i tre casi: $\lambda = 1/2$; $\lambda = 1$; e $\lambda \notin \{1/2, 1\}$.
Se è $\lambda = 1/2$, deve essere $x = 0$ e $z = 15/4$ e dall'equazione che definisce Σ segue $y = \pm\sqrt{15/8}$. Se è invece $\lambda = 1$, deve essere $y = 0$ e $z = 7/2$ e dall'equazione che definisce Σ segue $x = \pm\sqrt{7/2}$. Infine, per $\lambda \notin \{1/2, 1\}$, dalle prime due equazioni segue $x = y = 0$ e dall'equazione che definisce Σ segue $z = 0$.
Siano quindi $Q_\pm = (0, \pm\sqrt{15/8}, 15/4)$, $R_\pm = (\pm\sqrt{7/2}, 0, 7/2)$ e $S = (0, 0, 0)$ i punti così trovati. Si ha

$$\begin{aligned} f(Q_\pm) &= 15/8 + (15/4 - 4)^2 = 15/8 + 1/16 = 31/16; \\ f(R_\pm) &= 7/2 + (7/2 - 4)^2 = 7/2 + 1/4 = 15/4; \\ f(S) &= 16; \end{aligned}$$

e quindi, tenuto conto che risulta $31/16 < 15/4 < 4$, si conclude che i punti di Σ a distanza minima da P sono i punti $Q_\pm$ e che la corrispondente distanza è $d_\Sigma(O) = \sqrt{31}/4$.

Esercizio 4. Sia

$$K = \left\{(x,y,z):\ (x+1/2)^2 + (y+1/2)^2 + z \le 1,\ x+y+z \ge -1 \text{ e } x,y \ge 0\right\}.$$

(a) Descrivete l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K xy\, d(x,y,z)$.

Soluzione. L'insieme K è la porzione di spazio che si trova al di sotto della superficie del paraboloide di equazione $z = 1-(x+1/2)^2-(y+1/2)^2$ avente vertice nel punto di coordinate $(-1/2,-1/2,1)$ e asse parallelo all'asse z e al di sopra del piano di equazione $x+y+z=-1$ e contenuta nell'intersezione dei semispazi $x \ge 0$ e $y \ge 0$.
L'insieme K è chiuso perché è intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue (polinomi) ed è limitato poiché per ogni $(x,y,z) \in K$ risulta

$$\begin{cases} -1-x-y \le z \le 1-(x+1/2)^2+(y+1/2)^2 \\ x,y \ge 0 \end{cases}$$

da cui segue

$$x^2+y^2 \le 3/2 \qquad \text{e} \qquad x,y \ge 0$$

coicché, essendo x e y limitate, tale deve essere anche z. L'insieme K è dunque compatto e quindi è (Lebesgue) misurabile. La funzione $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto xy$ è un monomio e quindi è integrabile in K.
Calcoliamo I mediante la formula di riduzione per fili. Per quanto stabilito sopra, la proiezione di K sul piano xy è la parte del cerchio di equazione $x^2+y^2 \le 3/2$ contenuta nel primo quadrante ovvero

$$\pi_{xy}(K) = \left\{(x,y):\ x^2+y^2 \le 3/2 \text{ e } x,y \ge 0\right\}.$$

Per ogni $(x,y) \in \pi_{xy}(K)$, la corrispondente sezione è l'intervallo

$$K_{(x,y)} = \left[-1-x-y,\, 1-(x+1/2)^2-(1+1/2)^2\right] = \left[-1-(x+y),\, 1/2-x^2-y^2-(x+y)\right].$$

Per la formula di riduzione si ha allora

$$I = \int_{\pi_{xy}(K)} \left(\int_{-1-(x+y)}^{1/2-x^2-y^2-(x+y)} xy\, dz\right) d(x,y) = \int_{\pi_{xy}(K)} xy\left[3/2-(x^2+y^2)\right] d(x,y)$$

e l'integrale sulla proiezione $\pi_{xy}(K)$ si calcola facilmente utilizzando coordinate polari nel piano e la formula di riduzione nuovamente. Si ha infatti

$$\int_{\pi_{xy}(K)} xy\left[3/2-(x^2+y^2)\right] d(x,y) = \int_0^{\pi/2} \cos\theta \operatorname{sen}\theta\, d\theta \int_0^{\sqrt{3/2}} r^3\left(3/2-r^2\right) dr =$$

$$= \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2\theta\Big|_0^{\pi/2} \left(\frac{3}{8}r^4 - \frac{1}{6}r^6\right)\Big|_0^{\sqrt{3/2}} = \cdots = \frac{1}{2}\left(\frac{27}{32}-\frac{27}{48}\right) = \frac{27}{192}$$

cosicché risulta $I = 27/192$.

Esercizio 5. Determinate la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = -x(t)\log^2(x(t)) \\ x(0) = x_0 \end{cases}$$

con $x_0 = \mathrm{e}$ e $x_0 = 1/\mathrm{e}$.

Soluzione. L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili. La funzione a secondo membro è $f(t,x) = g(t)h(x)$ con

$$g(t) = 1, \qquad t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad h(x) = -x\log^2 x, \qquad x > 0.$$

In $(0,+\infty)$ la funzione h è infinite volte derivabile e quindi il problema di Cauchy considerato ha soluzione massimale $x \in C^\infty(\alpha,\beta)$ con $\alpha = \alpha(x_0)$ e $\beta = \beta(x_0)$ tali che $-\infty \le \alpha < 0 < \beta \le +\infty$. Tale soluzione è prolungamento di ogni altra soluzione del medesimo problema di Cauchy.
Poiché la funione h si annulla solo per $x = 1$, la soluzione del medesimo problema di Cauchy con dato iniziale $x_0 = 1$ è la funzione costante $x(t) = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e quindi le soluzioni massimali dei problemi di Cauchy con dato iniziale $x_0 = \mathrm{e}$ e $x_0 = 1/\mathrm{e}$ verificano le condizioni $x(t) > 1$ e $0 < x(t) < 1$ per ogni $t \in (\alpha,\beta)$ rispettivamente.
Consideriamo dapprima il caso $x_0 = \mathrm{e}$. Ponendo

$$H(y) = \int_{\mathrm{e}}^{y} -\frac{1}{z\log^2 z}\,dz = \frac{1}{\log z}\bigg|_{\mathrm{e}}^{y} = \frac{1}{\log y} - 1, \qquad y > 1,$$

si deduce che la funzione composta $H \circ x$ è in $C^\infty(\alpha,\beta)$ e verifica $(H \circ x)'(t) = 1$ per $\alpha < t < \beta$ e $H \circ x(0) = 0$. Dunque, per il teorema fondamentale del calcolo, deve essere $(H \circ x)(t) = t$ per $\alpha < t < \beta$ da cui segue con semplici calcoli

$$x(t) = \mathrm{e}^{1/(t+1)}, \qquad \alpha < t < \beta.$$

Poiché si ha

$$\lim_{y\to 1^+} H(y) = +\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{y\to+\infty} H(y) = -1,$$

si conclude che risulta $\alpha = -1$ e $\beta = +\infty$. La soluzione massimale con dato iniziale $x_0 = \mathrm{e}$ è dunque la funzione

$$x(t) = \mathrm{e}^{1/(t+1)}, \qquad t > -1.$$

Sia quindi $x_0 = 1/\mathrm{e}$. Ripetendo i calcoli precedenti con $x_0 = 1/\mathrm{e}$ e $0 < y < 1$, risulta

$$H(y) = \int_{1/\mathrm{e}}^{y} -\frac{1}{z\log^2 z}\,dz = \frac{1}{\log z}\bigg|_{1/\mathrm{e}}^{y} = \frac{1}{\log y} + 1, \qquad 0 < y < 1,$$

da cui segue come prima

$$x(t) = \mathrm{e}^{1/(t-1)}, \qquad \alpha < t < \beta.$$

e calcolando i limiti di $H(y)$ per $y \to 0^+$ e $H(y) \to 1^-$ si conclude che risulta $\alpha = -\infty$ e $\beta = 1$. La soluzione massimale con dato iniziale $x_0 = 1/\mathrm{e}$ è dunque la funzione

$$x(t) = \mathrm{e}^{1/(t-1)}, \qquad t < 1.$$