COGNOME	______________________	NON SCRIVERE QUI
NOME	______________________	1 2 3 4 5
MATRICOLA	⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌋	
LAUREA	CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC	

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI

A.A. 2023-2024 — PARMA, 26 GIUGNO 2024

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Calcolate il seguente limite: $\displaystyle\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{\arctan\left(x^2\sqrt{|y|}\right)}{2x^2-2xy+3y^2}$.

Soluzione. Risulta

$$2x^2-2xy+3y^2 \geq 2x^2-(x^2+y^2)+3y^2 = x^2+2y^2 \geq x^2+y^2$$

per ogni $(x,y)\in\mathbb{R}^2$ e quindi la funzione

$$f(x,y)=\frac{\arctan\left(x^2\sqrt{|y|}\right)}{2x^2-2xy+3y^2}, \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2,$$

di cui si chiede di calcolare il limite è ben definita al di fuori dell'origine che è punto di accumulazione per il dominio. Ricordando che risulta $|\arctan t|\leq|t|$ per ogni $t\in\mathbb{R}$, si ha

$$0\leq|f(x,y)|\leq\frac{x^2|\sqrt{|y|}}{2x^2-2xy+3y^2}\leq\frac{x^2|\sqrt{|y|}}{x^2+y^2}, \qquad (x,y)\neq(0,0)$$

e quindi, tenendo conto che per gli esponenti di x e y a numeratore e denominatore della frazione a destra risulta $1+1/4=5/4>1$, si ha

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)}\frac{\arctan\left(x^2\sqrt{|y|}\right)}{2x^2-2xy+3y^2}=0$$

per un risultato noto. Pertanto, il limite proposto esiste ed è uguale a zero per il criterio del confronto.

Esercizio 2. Determinate per quali $k\in\mathbb{R}$ tutte le soluzioni $x(t)$ dell'equazione differenziale

$$x''(t)+2kx'(t)+(1+k^2)x(t)=2$$

verificano la condizione $x(t)\to 1$ per $t\to+\infty$.

Soluzione. L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è $\lambda^2+2k\lambda+(1+k^2)=0$ le cui soluzioni complesse e coniugate sono date da $\lambda_\pm=-k\pm i$. Quindi, le funzioni

$$x_1(t)=\mathrm{e}^{-kt}\cos t; \qquad x_2(t)=\mathrm{e}^{-kt}\operatorname{sen} t;$$

con $t\in\mathbb{R}$ sono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e chiaramente la funzione $x_p(t)=2/(1+k^2)$ per ogni $t\in\mathbb{R}$ è una soluzione dell'equazione completa. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione proposta sono le funzioni

$$x(t)=C_1\mathrm{e}^{-kt}\cos t+C_2\mathrm{e}^{-kt}\operatorname{sen} t+\frac{2}{1+k^2}, \qquad t\in\mathbb{R},$$

con $C_i\in\mathbb{R}$ $(i=1,2)$ costanti arbitrarie. Indipendentemente dalla scelta delle costanti C_1 e C_2, affinché esista il limite di $x(t)$ per $t\to+\infty$ deve essere $k>0$ nel qual caso risulta $x(t)\to 2/(1+k^2)$ per $t\to+\infty$. Deve quindi essere $2/(1+k^2)=1$ e $k>0$ ovvero $k=1$.

Esercizio 3. Determinate la funzione $a \in C^1(\mathbb{R})$ in modo tale che il campo vettoriale $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ di componenti

$$\begin{cases} f^1(x,y,z) = 2x + a(y) - 3z \\ f^2(x,y,z) = a(y)x + 2y + a(y)z \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \\ f^3(x,y,z) = -3x + a(y) + 4z \end{cases}$$

sia conservativo e per il lavoro L compiuto dal campo f lungo una qualunque curva parametrica liscia a tratti che connette l'origine con il punto di coordinate $(1,1,1)$ risulti

$$L = \int_\gamma f \cdot dl = 2\mathrm{e}.$$

Soluzione. Per ogni funzione a di classe C^1 in $\mathbb{R}$ il campo vettoriale f risulta a sua volta essere di classe C^1 in $\mathbb{R}^3$ cosicché, essendo $\mathbb{R}^3$ un aperto convesso, esso è conservativo se e solo se è irrotazionale ovvero se e solo se risulta

$$f^1_y(x,y,z) = f^2_x(x,y,z); \qquad f^1_z(x,y,z) = f^3_x(x,y,z); \qquad f^2_z(x,y,z) = f^3_y(x,y,z);$$

per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Le derivate in croce di f sono date da

$$\begin{aligned} f^1_y(x,y,z) &= a'(y); \qquad & f^1_z(x,y,z) &= -3; \\ f^2_x(x,y,z) &= a(y); & f^2_z(x,y,z) &= a(y); \\ f^3_x(x,y,z) &= -3; & f^3_y(x,y,z) &= a'(y); \end{aligned}$$

per ogni (x,y,z) e quindi il campo f risulta irrotazionale in $\mathbb{R}^3$ se e solo si ha

$$a'(y) = a(y), \qquad y \in \mathbb{R},$$

per ogni $y \in \mathbb{R}$ da cui segue evidentemente

$$a(y) = C\mathrm{e}^y, \qquad y \in \mathbb{R},$$

con $C \in \mathbb{R}$ costante arbitraria. Per tali funzioni a, il campo vettoriale f è conservativo e un suo potenziale è dato da

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= \int_0^x f^1(t,0,0)\,dt + \int_0^y f^2(x,t,0)\,dt + \int_0^z f^3(x,y,t)\,dt = \\ &= \int_0^x (2t - C)\,dt + \int_0^y \left(C\mathrm{e}^t x + 2t\right)\,dt + \int_0^z \left(-3x + C\mathrm{e}^y + 4t\right)\,dt = \\ &= x^2 + Cx\,(\mathrm{e}^y - 2) + y^2 - 3xz + Cz\mathrm{e}^y + 2z^2 \end{aligned}$$

per ogni (x,y,z). Scegliamo infine la costante C in modo che il lavoro L compiuto dal campo lungo una qualunque curva parametrica liscia a tratti avente come estremi l'origine e il punto di coordinate $(1,1,1)$ sia uguale a 1. Essendo il campo vettoriale f conservativo, tale lavoro L è dato da

$$L = F(1,1,1) - F(0,0,0) = 1 + 2C(\mathrm{e} - 1)$$

e quindi risulta $L = 1$ per $C = 1/2$. La funzione cercata è quindi

$$a(y) = \frac{1}{2}\mathrm{e}^y, \qquad y \in \mathbb{R}.$$

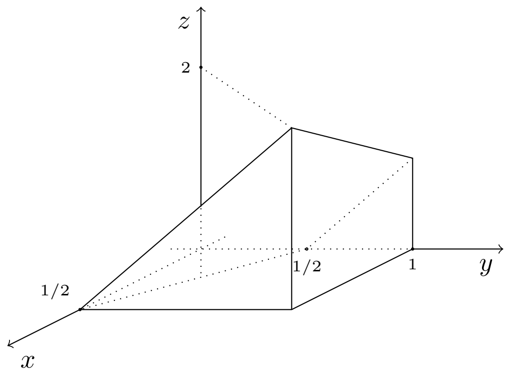
Esercizio 4. Sia

$$K = \left\{(x, y, z) : \ 0 \le z \le x + 2y - 1 \text{ e } 0 \le x, y \le 1\right\}.$$

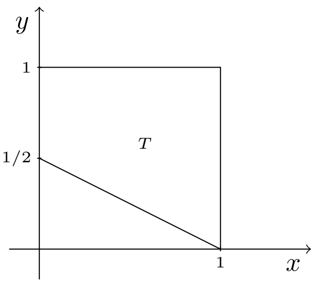
(a) Descrivete e disegnate l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K x\, d(x, y, z)$.

Soluzione. (a) L'insieme K è il poliedro formato dai punti del poliedro delimitato dai piani $x = 0$, $x = 1$, $y = 0$ e $y = 1$ compresi tra i piani di equazione $z = 0$ e $x + 2y - z = 1$. Esso è rappresentato in Figura (1).



(1)



(2)

(b) L'insieme K è chiuso in quanto intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni lineari ed è evidentemente limitato poiché contenuto nel parallelepipedo P. Pertanto K è compatto e quindi (Lebesgue) misurabile. Inoltre, la funzione $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x$ è lineare e quindi è integrabile su ogni insieme compatto.

Calcoliamo l'integrale di f su K mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione di K sul piano xy è il trapezio

$$T = \pi_{xy}(K) = \left\{(x, y) : \ 0 \le x \le 1 \text{ e } (1 - x)/2 \le y \le 1\right\},$$

(Figura (2)) e le corrispondenti sezioni sono gli intervalli

$$K_{(x,y)} = [0, x + 2y - 1], \qquad (x, y) \in T.$$

Per la formula di riduzione si ha allora

$$I = \int_T \left(\int_0^{x+2y-1} x\, dz\right) d(x, y) = \int_T x(x + 2y - 1)\, d(x, y)$$

e per la stessa formula risulta poi

$$\begin{aligned}
\int_T x(x + 2y - 1)\, d(x, y) &= \int_0^1 \left(\int_{(1-x)/2}^1 \left(x^2 + 2xy - x\right)\, dy\right) dx = \\
&= \int_0^1 \left(x^2 y + xy^2 - xy\right)\Big|_{(1-x)/2}^1 dx = \\
&= \int_0^1 \left\{\frac{x^2}{2}(x + 1) + x\left[1 - \frac{1}{4}(1 - x)^2\right] - \frac{x}{2}(x + 1)\right\} dx = \\
&= \int_0^1 \left(\frac{x^3}{4} + \frac{x^2}{2} + \frac{x}{4}\right) dx = \\
&= \left(\frac{x^4}{16} + \frac{x^3}{6} + \frac{x^2}{8}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{16} + \frac{1}{6} + \frac{1}{8} = \frac{17}{48}.
\end{aligned}$$

Esercizio 5. Determinate la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = 1 - \dfrac{1}{\mathrm{e}^{x(t)}} \\ x(0) = \log(1/2). \end{cases}$$

Soluzione. L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili. La funzione a secondo membro è $f(t,x) = g(t)h(x)$ con

$$g(t) = 1, \qquad t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad h(x) = 1 - \frac{1}{\mathrm{e}^x}, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

In tale intervallo la funzione h è infinite volte derivabile e quindi il problema di Cauchy considerato ha soluzione massimale $x \in C^\infty(\alpha,\beta)$ con $-\infty \le \alpha = \alpha(x_0) < 0 < \beta = \beta(x_0) \le +\infty$. Tale soluzione è prolungamento di ogni altra soluzione del medesimo problema di Cauchy.
Poiché la soluzione del medesimo problema di Cauchy con dato iniziale $x_0 = 0$ è la funzione identicamente nulla $x(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, la soluzione massimale del problema di Cauchy considerato verifica la condizione $x(t) < 0$ per ogni $t \in (\alpha,\beta)$. Ponendo

$$H(y) = \int_{\log(1/2)}^{y} \frac{1}{1-\mathrm{e}^{-z}}\,dz = \int_{\log(1/2)}^{y} \frac{\mathrm{e}^z}{\mathrm{e}^z - 1}\,dz = \log(1-\mathrm{e}^z)\Big|_{\log(1/2)}^{y} = \log(1-\mathrm{e}^y) + \log 2, \qquad y < 0,$$

per ogni $y < 0$, si deduce che la funzione composta $H \circ x$ è in $C^\infty(\alpha,\beta)$ e verifica $(H \circ x)'(t) = 1$ per $\alpha < t < \beta$ e $H \circ x(0) = 0$. Dunque, per il teorema fondamentale del calcolo, deve essere $(H \circ x)(t) = t$ per $\alpha < t < \beta$ da cui segue con semplici calcoli

$$x(t) = \log\left(1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^t\right), \qquad \alpha < t < \beta.$$

Poiché si ha

$$\lim_{y \to -\infty} H(y) = \log 2 \qquad \text{e} \qquad \lim_{y \to 0^-} H(y) = -\infty,$$

si conclude che risulta

$$\alpha(x_0) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \beta(x_0) = \log 2.$$

La soluzione massimale è dunque

$$x(t) = \log\left(1 - \frac{1}{2}\mathrm{e}^t\right), \qquad t < \log 2.$$