COGNOME	______________________	NON SCRIVERE QUI	
NOME	______________________	1 2 3 4 5	
MATRICOLA	________		
LAUREA	CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC		

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI

A.A. 2023-2024 — PARMA, 12 GIUGNO 2022

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Determinate per quali $a \in \mathbb{R}$ risulta

$$x^2 - 2xy + 2y^2 + 6yz + az^2 > 0$$

per ogni $(x, y, z) \neq (0, 0, 0)$.

Soluzione. Occorre determinare i numeri $a \in \mathbb{R}$ per i quali la forma quadratica q_S associata alla matrice simmetrica

$$S = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 3 \\ 0 & 3 & a \end{pmatrix}$$

è positiva in $\mathbb{R}^3$ al di fuori dell'origine e ciò accade se e solo se tutti gli autovalori di S sono positivi. Poiché i determinanti delle sottomatrici disposte lungo la diagonale principale sono $\Delta_1 = 1$, $\Delta_2 = 1$ e $\Delta_3 = a - 9$, la matrice S ha autovalori positivi per $a > 9$ per il criterio di Sylvester e ha almeno un autovalore negativo per $a < 9$. Per $a = 9$ risulta

$$q_S(x, y, z) = (x - y)^2 + (y + 3z)^2, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

che evidentemente si annulla nei punti di coordinate $x = y = -3z$.

Esercizio 2. Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ il campo vettoriale di componenti $f = (f^1, f^2, f^3)$ definite da

$$f^1(x, y, z) = x^3; \qquad f^2(x, y, z) = \mathrm{e}^{2y}; \qquad f^3(x, y, z) = \cos z;$$

per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$. Calcolate il lavoro L di f lungo la curva parametrica

$$\gamma(t) = \mathrm{e}^{2t} e_1 + t^2 \cos(\pi t) e_2 + t^4 \mathrm{e}^{4t} e_3, \qquad t \in [0, 1].$$

Soluzione. Poiché ciascuna componente del campo f dipende solo dlla corrispondente variabile, il esso risulta ovviamente irrotazionale e dunque conservativo in $\mathbb{R}^3$. Un suo potenziale si ottiene integrando separatamente le tre componenti ed è quindi dato da

$$F(x, y, z) = \frac{1}{4}x^4 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{2y} + \operatorname{sen} z, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

ed il lavoro L che è l'integrale curvilineo di f lungo la curva liscia γ è uguale alla differenza di potenziale agli estremi di γ:

$$L = \int_\gamma f \cdot dl = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)).$$

Risulta $\gamma(0) = (1, 0, 0)$ e $\gamma(1) = (\mathrm{e}^2, -1, \mathrm{e}^4)$ da cui segue

$$L = F(\mathrm{e}^2, -1, \mathrm{e}^4) - F(1, 0, 0) = \frac{1}{4}\mathrm{e}^4 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2} + \operatorname{sen}\mathrm{e}^4 - \frac{1}{4} - \frac{1}{2} = \frac{1}{4}\mathrm{e}^4 + \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2} + \operatorname{sen}\mathrm{e}^4 - \frac{3}{4}.$$

Esercizio 3. Sia

$$f(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - 3z^2, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Determinate il minimo e il massimo globale di f sull'ellissoide

$$\Sigma = \left\{(x,y,z):\ 2x^2 + 3y^2 + z^2 = 1\right\}.$$

(b) Descrivete l'insieme $K = \Sigma \cup \Gamma$ ove

$$\Gamma = \left\{(x,y,z):\ x = 0 \text{ e } y^2 + z^2 = 1\right\}$$

e calcolate il massimo ed il minimo globale di f su K.

Soluzione. (a) L'ellissoide Σ ha centro nell'origine, assi coincidenti con gli assi cartesiani e semiassi $a = 1/\sqrt{2}$, $a = 1/\sqrt{3}$ e $c = 1$. Esso è una superficie regolare e compatta in $\mathbb{R}^3$ e la funzione f è un polinomio. Per il teorema di Weierstrass esistono dunque il minimo e il massimo globale di f che possiamo determinare con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Il sistema dei moltiplicatori di Lagrange è

$$\begin{cases} 2x - 4\lambda x = 0 \\ 4y - 6\lambda y = 0 \\ -6z - 2\lambda z = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} (1-2\lambda)x = 0 \\ (2-3\lambda)y = 0 \\ (3+\lambda)z = 0 \end{cases}$$

cui va aggiunta l'equazione che esprime l'appartenenza del punto a Σ.
Per $\lambda \notin \{1/2, 2/3, -3\}$, il sistema formato dalle prime tre equazioni ha come sola soluzione $x = y = z = 0$ che sono le coordinate dell'origine che non appartiene a Σ.
Per $\lambda = 1/2$, le soluzioni sono $y = z = 0$ e $x = \pm 1/\sqrt{2}$. Analogamente, per $\lambda = 2/3$, le soluzioni sono $x = z = 0$ e $y = \pm 1/\sqrt{3}$ e infine per $\lambda = -3$ le soluzioni $x = z = 0$ $z = \pm 1$. A queste soluzioni corrispondono i punti

$$P_\pm = (\pm 1/\sqrt{2}, 0, 0); \qquad Q_\pm = (0, \pm 1/\sqrt{3}, 0); \qquad R_\pm = (0,0,\pm 1);$$

e da

$$f(P_\pm) = 1/2; \qquad f(Q_\pm) = 2/3; \qquad f(R_\pm) = -3;$$

si conclude che $Q_\pm$ e $R_\pm$ sono rispettivamente punto di massimo globale e minimo globale di f su Γ.
(b) L'insieme Γ è la circonferenza di raggio unitario contenuta nel piano yz con centro nell'origine. Anch'essa è compatta e quindi la funzione f assume il minimo e il massimo globale su Γ per il teorema di Weierstass. Conseguentemente, f assume minimo e massimo globale su $K = \Sigma \cup \Gamma$ ed il minimo e il massimo globale su K sono il minimo e il massimo tra i minimi e i massimi globali di f su Σ e Γ.
Per determinare gli estremi globali di f su Γ, anziché rappresentare Γ come sostegno di una curva parametrica semplice e liscia o utilizzare nuovamente i moltiplicatori di Lagrange, è possibile osservare che si ha

$$\begin{cases} x = 0 \\ y^2 + z^2 = 1 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad f(x,y,z) = 2 - 5z^2$$

e quindi su Γ la funzione f coincide con la funzione

$$g(z) = 2 - 5z^2, \qquad z \in \mathbb{R},$$

al variare di z nell'intervallo $[0,1]$, proiezione di Γ sull'asse z. Conseguentemente, il minimo e il massimo globale di f su Γ sono assunti nei punti di coordinate $R_\pm = (0,0,\pm 1)$ (già trovati) e $S_\pm = (0,\pm 1, 0)$ dove f assume i valori $f(R_\pm) = -3$ e $f(S_\pm) = 2$.
In conclusione, il minimo e il massimo globale di f su K sono assunti nei punti $R_\pm$ e $S_\pm$ e risulta $f(R_\pm) = -3$ e $f(S_\pm) = 2$.

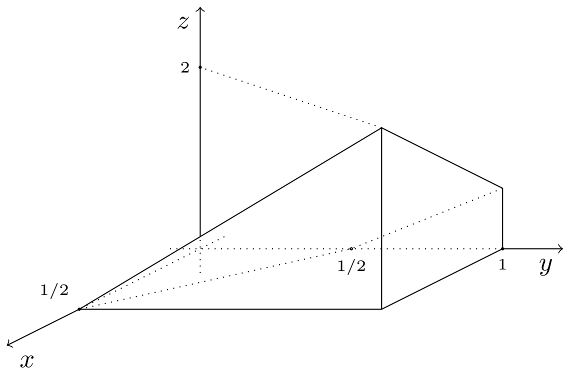
Esercizio 4. Sia

$$K = \{(x, y, z) : \; 0 \le x \le 1/2, \; 0 \le y \le 1, \; 0 \le z \le 2 \text{ e } 2x + 2y - z \ge 1\}.$$

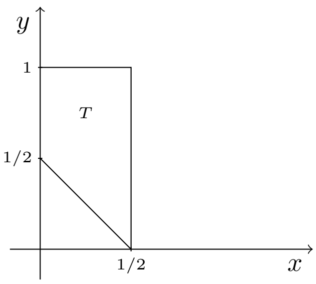
(a) Descrivete e disegnate l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K x \, d(x, y, z)$.

Soluzione. (a) L'insieme K è il poliedro formato dai punti del parallelepipedo $P = [0, 1/2] \times [0, 1] \times [0, 2]$ che stanno al di sotto del piano $2x + 2y - z = 1$. Esso è rappresentato in Figura (1).



(1)



(2)

(b) L'insieme K è chiuso in quanto intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni lineari ed è evidentemente limitato poiché contenuto nel parallelepipedo P. Pertanto K è compatto e quindi (Lebesgue) misurabile. Inoltre, la funzione $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x$ è lineare e quindi è integrabile su ogni insieme compatto.
Calcoliamo l'integrale di f su K mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione di K sul piano xy è il trapezio

$$T = \pi_{xy}(K) = \{(x, y) : \; 0 \le x \le 1/2 \text{ e } 1/2 - x \le y \le 1\},$$

(Figura (2)) e le corrispondenti sezioni sono gli intervalli

$$K_{(x,y)} = [0, 2x + 2y - 1], \qquad (x, y) \in T.$$

Per la formula di riduzione si ha allora

$$I = \int_T \left(\int_0^{2x+2y-1} x \, dz \right) d(x, y) = \int_T x(2x + 2y - 1) \, d(x, y)$$

e per la stessa formula risulta poi

$$\begin{aligned}
\int_T x(2x + 2y - 1) \, d(x, y) &= \int_0^{1/2} \left(\int_{1/2-x}^1 \left(2x^2 + 2xy - x\right) \, dy \right) dx = \\
&= \int_0^{1/2} \left(2x^2 y - xy^2 - y\right) \Big|_{1/2-x}^1 \, dx = \\
&= \int_0^{1/2} \left\{ 2x^2(x + 1/2) + x \left[1 - (1/2 - x)^2\right] - x(x + 1/2) \right\} dx = \\
&= \int_0^{1/2} \left(x^3 + x^2 + x/4\right) \, dx = \\
&= \left(\frac{x^4}{4} + \frac{x^3}{3} + \frac{x^2}{8} \right) \Big|_0^{1/2} = \frac{1}{64} + \frac{1}{24} + \frac{1}{32} = \frac{17}{192}.
\end{aligned}$$

Esercizio 5. Data l'equazione differenziale

$$x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = \frac{1}{e^t \cos t}, \qquad 0 < |t| < \pi/2,$$

determinate

(a) tutte le soluzioni $x(t)$ dell'equazione differenziale;

(b) la soluzione $x(t)$ tale che $x(0) = 1$ e $x'(0) = 0$.

Soluzione. (a) L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ le cui soluzioni complesse e coniugate sono date da $\lambda_\pm = -1 \pm i$. Quindi, le funzioni

$$x_1(t) = e^{-t} \cos t; \qquad x_2(t) = e^{-t} \operatorname{sen} t;$$

con $t \in \mathbb{R}$ sono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e si può procedere alla ricerca di una soluzione dell'equazione completa con il metodo di variazione delle costanti arbitrarie cercando una soluzione della forma

$$x_p(t) = c_1(t)e^{-t} \cos t + c_2(t)e^{-t} \operatorname{sen} t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con c_1 e c_2 funzioni di classe C^1 in $\mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} c_1'(t)x_1(t) + c_2'(t)x_2(t) = 0 \\ c_1'(t)x_1'(t) + c_2'(t)x_2'(t) = \dfrac{1}{e^t \cos t} \end{cases} \qquad 0 < |t| < \pi/2.$$

Deve quindi essere

$$\begin{cases} c_1'(t)e^{-t} \cos t + c_2'(t)e^{-t} \operatorname{sen} t = 0 \\ c_1'(t) \left[-e^{-t} \cos t - e^{-t} \operatorname{sen} t\right] + c_2'(t) \left[-e^{-t} \operatorname{sen} t + e^{-t} \cos t\right] = \dfrac{1}{e^t \operatorname{sen} t} \end{cases}$$

con $0 < |t| < \pi$ da cui segue

$$\begin{cases} c_1'(t) \cos t + c_2'(t) \operatorname{sen} t = 0 \\ -c_1'(t) \operatorname{sen} t + c_2'(t) \cos t = \dfrac{1}{\cos t} \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} c_1'(t) = -\tan t \\ c_2'(t) = 1 \end{cases}$$

con $0 < |t| < \pi$. Integrando, si trova (a meno di costanti arbitrarie)

$$c_1(t) = \log(\cos t) \qquad \text{e} \qquad c_2(t) = t$$

per $0 < |t| < \pi$ da cui segue

$$x_p(t) = \log(\cos t)e^{-t} \cos t + te^{-t} \operatorname{sen} t \qquad 0 < |t| < \pi.$$

Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono le funzioni

$$x(t) = [C_1 + \log(\cos t)]\, e^{-t} \cos t + (C_1 + t)e^{-t} \operatorname{sen} t, \qquad 0 < |t| < \pi,$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.

(b) Tenendo conto di (a), scegliamo le costanti $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ in modo che risulti $x(0) = 1$ e $x'(0) = 0$. Si ha

$$\begin{cases} x(0) = C_1 = 1 \\ x'(0) = C_1 + C_2 = 0 \end{cases}$$

da cui segue $C_1 = C_2 = 1$. La soluzione cercata è dunque la funzione

$$x(t) = [1 + \log(\cos t)]\, e^{-t} \cos t + (1 + t)e^{-t} \operatorname{sen} t, \qquad 0 < |t| < \pi.$$