COGNOME ______________________	NON SCRIVERE QUI
NOME ______________________	1 | 2 | 3 | 4 | 5
MATRICOLA $\llcorner\!\!\!\perp\!\!\perp\!\!\perp\!\!\perp\!\!\perp\!\lrcorner$	
LAUREA CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC	

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI

A.A. 2022-2023 — PARMA, 9 GENNAIO 2024

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Sia $\gamma\colon [1, 100] \to \mathbb{R}^3$ la curva parametrica definita da

$$\gamma(t) = t^{-2}e_1 + (t^2 - 7t)e_2 + (\log t)e_3, \qquad t \in [1, 100].$$

Determinate $t_0 \in [1, 100]$ in modo che la retta tangente alla curva γ nel punto $\gamma(t_0)$ sia ortogonale al piano π di equazione $x + 12y - 2z = 0$.

Soluzione. Il vettore ortogonale al piano π è $v = (1, 12, -2)$. Occorre quindi determinare $t \in [1, 100]$ in modo che il vettore derivata

$$\gamma'(t) = -2t^{-3}e_1 + (2t - 7)e_2 + t^{-1}e_3$$

sia parallelo a v. Deve quindi essere

$$\begin{pmatrix} -2t^{-3} \\ 2t-7 \\ t^{-1} \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 12 \\ -2 \end{pmatrix} \qquad \iff \qquad \begin{cases} -2/t^3 = \lambda \\ 2t - t = 12\lambda \\ 1/t = -2\lambda \end{cases}$$

per $t \in [1, 100]$ e per qualche $\lambda \neq 0$. Dalla prima e dalla terza equazione segue $t = 2$ e $\lambda = 1/4$ e questi valori rendono la seconda equazione un'identità. Deve quindi essere $t_0 = 2$.

Esercizio 2. Siano $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ di componenti $f = (f^1, f^2)$ e $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ funzioni tali che

$$f(0,0,0) = (0,0); \qquad Df(0,0,0) = \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}; \qquad Dg(0,0) = (-1,3).$$

Calcolate le derivate parziali nel punto di coordinate $(0, 0, 0)$ della funzione composta

$$h(x,y,z) = g\left(f^1(x,y,z), f^2(x,y,z)\right), \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Soluzione. La funzione composta $h = g \circ f$ è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^3)$ e per la regola della catena risulta

$$Dh(x,y,z) = Dg(f(x,y,z))Df(x,y,z), \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

e quindi per $(x, y, z) = (0, 0, 0)$ risulta

$$Dh(0,0,0) = Dg(0,0)DF(0,0,0) = (-1,3) \begin{pmatrix} -1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

Calcolando il prodotto riga per colonna, si ottiene

$$Dh(0,0,0) = (7,0,5)$$

da cui segue che le derivate parziali di h in in $(0, 0, 0)$ sono

$$h_x(0,0,0) = 7; \qquad h_y(0,0,0) = 0; \qquad h_z(0,0,0) = 5.$$

Esercizio 3. Sia

$$f(x,y,z) = x^3 + xy^2 - y^2 + z^2 - xz - 3x - z, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Determinate gli eventuali punti critici di f e stabilitene la natura.

(b) Determinate il minimo e il massimo globale di f sull'insieme

$$K = \{(x,y,z) : \, x + y \leq 1, \, x, y \geq 0 \text{ e } z = 1\}.$$

Soluzione. (a) La funzione f è un polinomio e quindi è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^3$. Le derivate parziali di f sono date da

$$f_x(x,y,z) = 3x^2 + y^2 - z - 3; \qquad f_y(x,y,z) = 2xy - 2y; \qquad f_z(x,y,z) = 2z - x - 1;$$

per ogni (x,y,z) e quindi i punti critici sono i punti di coordinate (x,y,z) che sono soluzioni del sistema formato dalle equazioni

$$3(x^2-1) + y^2 - z = 0; \qquad y(x-1) = 0; \qquad 2z - x = 1.$$

Dalla seconda equazione si ricava che deve essere $x = 1$ oppure $y = 0$. Per $x = 1$, le rimanenti due equazioni diventano $y^2 - z = 0$ e $z = 1$ da cui si ottengono i punti critici $P_\pm = (1, \pm 1, 1)$. Per $y = 0$, le rimanenti due equazioni diventano $3x^2 - 6x - 3 - z = 0$ e $2z = x + 1$ ovvero $6x^2 - x - 7 = 0$ e $2z = x + 1$ da cui si ottengono i punti critici $Q = (-1, 0, 0)$ e $R = (7/6, 0, 13/12)$.
Per determinare la natura dei punti critici, consideriamo la matrice hessiana di f che è data da

$$D^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 6x & 2y & -1 \\ 2y & 2x-2 & 0 \\ -2z & 0 & 2 \end{pmatrix}, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

I minori principali nei punti punti $P_\pm$, Q e R sono rispettivamente dati da

$$\begin{aligned} &\Delta_1 = 6; && \Delta_2 = -4; && \Delta_3 = -8; \\ &\Delta_1 = -6; && \Delta_2 = 24; && \Delta_3 = 52; \\ &\Delta_1 = 7; && \Delta_2 = 7/3; && \Delta_3 = 13/3; \end{aligned}$$

e quindi per il criterio di Sylvester la matrice hessiana di f nei punti $P_\pm$ e Q deve avere autovalori di segno discorde mentre in R ha autovalori positivi. Conseguentemente, i punti critici $P_\pm$ e Q sono punti di sella di f mentre R è punto di minimo locale stretto di f.
(b) Dato che l'insieme K è contenuto nel piano $z = 1$, il problema di determinare gli eventuali estremi globali di f su K si riduce al problema di determinare gli estremi globali di

$$g(x,y) = f(x,y,4/3) = x^3 + xy^2 - y^2 - 4x, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

sul triangolo $T = \{(x,y) : \, x + y \leq 1 \text{ e } x, y \geq 0\}$. Il triangolo T è compatto e g è un polinomio e quindi per il teorema di Weierstrass esistono il minimo e il massimo globale di g su T e quindi di f su K.
Ragionando come nella prima parte, si verifica che eventuali punti critici di g si trovano sulle rette di equazione $x = 1$ e $y = 0$ cosicché nessuno di essi appartiene all'interno di T. Pertanto, gli estremi globali di g su T sono assunti sul bordo di T che è l'unione dei sostegni delle curve parametriche semplici e lisce $\gamma_1(t) = te_1$, $\gamma_2(t) = (1-t)e_1 + te_2$ e $\gamma_3(t) = (1-t)e_2$ per $t \in [0,1]$. Esaminando l'andamento delle funzioni composte

$$\begin{aligned} &g_1(t) = g(\gamma_1(t)) = t^3 - 4t; && g_1'(t) = 3t^2 - 4 < 0 && \forall t \in [0,1]; \\ &g_2(t) = g(\gamma_2(t)) = -2t^3 + 3t^2 + t - 3; && g_2'(t) = -6t^2 + 6t + 1 > 0 && \forall t \in [0,1]; \\ &g_3(t) = g(\gamma_3(t)) = -(1-t)^2; && g_3'(t) = 2(1-t) > 0 && \forall t \in [0,1); \end{aligned}$$

si conclude che g_1 è strettamente decrescente in $[0,1]$ mentre g_2 e g_3 sono strettamente crescenti nello stesso intervallo. Conseguentemente, il minimo globale di g su T è assunto nel punto di coordinate $(1,0)$ e il massimo globale di g su T è assunto nel punt0 di coordinate $(0,1)$. In tali punti risulta

$$f(1,0,1) = g(1,0) = -3 \quad \text{e} \quad f(0,0,0) = g(0,0) = 0.$$

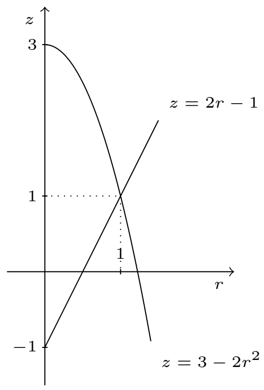
Esercizio 4. Sia

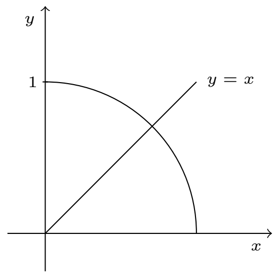
$$K = \left\{(x, y, z) : \; 2\sqrt{x^2 + y^2} - 1 \le z \le 3 - 2\left(x^2 + y^2\right) \text{ e } 0 \le y \le x\right\}.$$

(a) Descrivete l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K y \, d(x, y, z)$.

Soluzione. L'insieme K è l'intersezione della parte del poliedro definito dai piani $y = 0$ e $y = x$ contenuta nel semispazio $x \ge 0$ con il solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la figura contenuta nel primo quadrante del piano rz (con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$) che sta sopra la retta di equazione $z = 2r - 1$ e sotto la parabola di equazione $z = 3 - 2r^2$ come illustrato nella figura a sinistra.





L'insieme K è compatto perché è limitato ed è intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue e quindi è (Lebesgue) misurabile. La funzione $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto y$ è lineare e quindi è integrabile in K.
Calcoliamo l'integrale I mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione di K sul piano xy è l'insieme

$$\pi_{xy}(K) = \left\{(x, y) : \; \sqrt{x^2 + y^2} \le 1 \text{ e } 0 \le y \le x\right\}$$

rappresentato nella figura a destra e per ogni $(x, y) \in \pi_{xy}(K)$ la corrispondente sezione è l'intervallo

$$K_{(x,y)} = \left[2\sqrt{x^2 + y^2} - 1, 3 - 2\left(x^2 + y^2\right)\right], \qquad (x, y) \in \pi_{xy}(K).$$

Per la formula di riduzione si ha allora

$$\begin{aligned} I = \int_K y \, d(x, y, z) &= \int_{\pi_{xy}(K)} \left(\int_{2\sqrt{x^2+y^2}-1}^{3-2(x^2+y^2)} y \, dz\right) d(x, y) = \\ &= \int_{\pi_{xy}(K)} y \left[4 - 2\sqrt{x^2 + y^2} - 2(x^2 + y^2)\right] d(x, y) = \end{aligned}$$

e quindi, utilizzando coordinate polari per calcolare l'integrale a destra, si ottiene

$$\begin{aligned} &= \left(\int_0^{\pi/4} \operatorname{sen}\theta \, d\theta\right) \cdot \left(\int_0^1 \left(4 - 2r - 2r^2\right) r^2 \, dr\right) = \\ &= -\cos\theta \Big|_0^{\pi/4} \cdot (-2) \cdot \left(\frac{1}{5}r^5 + \frac{1}{4}r^4 - \frac{2}{3}r^3\right)\Big|_0^1 = \\ &= (-2) \cdot \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \cdot \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{4} - \frac{2}{3}\right) = \cdots = (2 - \sqrt{2})\frac{13}{60}. \end{aligned}$$

Esercizio 5. Considerate il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) - 2x'(t) + 2x(t) = 2\mathrm{e}^t \cos t + 2\mathrm{e}^t \operatorname{sen} t \\ x(0) = 1,\ x'(0) = -1. \end{cases}$$

(a) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale.

(b) Determinate la soluzione del problema di Cauchy.

Soluzione. (a) L'equazione proposta è una equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 2\lambda + 2 = 0$ le cui soluzioni complesse coniugate sono $\lambda = 1 \pm i$. Quindi, le funzioni

$$x_1(t) = \mathrm{e}^t \cos t; \qquad x_2(t) = \mathrm{e}^t \operatorname{sen} t;$$

con $t \in \mathbb{R}$ sono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^t \cos t + C_2\mathrm{e}^t \operatorname{sen} t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
Poiché il termine non omogeneo dell'equazione è soluzione dell'equzione omogenea, cerchiamo una soluzione dell'equazione completa della forma

$$x_p(t) = At\mathrm{e}^t \cos t + Bt\mathrm{e}^t \operatorname{sen} t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $A, B \in \mathbb{R}$ costanti da determinare. Si ha allora

$$x_p''(t) - 2x_p'(t) + 2x_p(t) = 2Bx_1(t) - 2Ax_2(t) = 2B\mathrm{e}^t \cos t - 2A\mathrm{e}^t \operatorname{sen} t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

da cui segue $A = -1$ e $B = 1$. Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione completa sono le funzioni

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^t \cos t + C_2\mathrm{e}^t \operatorname{sen} t - t\mathrm{e}^t \cos t + t\mathrm{e}^t \operatorname{sen} t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
(b) Scegliamo le costanti $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ in modo che la soluzione $x(t)$ definita in (a) sia tale che $x(0) = 1$ e $x'(0) = -1$. Si ha

$$\begin{cases} x(0) = C_1 = 1 \\ x'(0) = C_1 + C_2 - 1 = -1 \end{cases}$$

da cui segue $C_1 = 1$ e $C_2 = -1$. La soluzione cercata è dunque la funzione

$$x(t) = (1 - t)\left(\mathrm{e}^t \cos t - \mathrm{e}^t \operatorname{sen} t\right), \qquad t \in \mathbb{R}.$$