COGNOME	______________________
NOME	______________________
MATRICOLA	⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌋
LAUREA	CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4	5

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI

A.A. 2022-2023 — PARMA, 20 NOVEMBRE 2023

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Data la funzione

$$f(x,y,z) = x^2 e^{3y} \operatorname{sen} z, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

determinate il versore v di $\mathbb{R}^3$ che rende massima la derivata direzionale $\partial_v f$ nel punto di coordinate $(-1,0,3\pi/4)$.

Soluzione. La funzione f è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^3$ e le sue derivate parziali sono date da

$$f_x(x,y,z) = 2xe^{3y} \operatorname{sen} z; \qquad f_y(x,y,z) = 3x^2 e^{3y} \operatorname{sen} z; \qquad f_z(x,y,z) = x^2 e^{3y} \cos z;$$

per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Il gradiente di f in $(-1,0,3\pi/4)$ è quindi dato da

$$\nabla f(-1,0,3\pi/4) = \begin{pmatrix} -2\sqrt{2} \\ 3/\sqrt{2} \\ -1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \text{con} \qquad \|\nabla f(-1,0,3\pi/4)\| = \sqrt{7}$$

e dunque, essendo non nullo, il versore v che rende massima la derivata direzionale $\partial_v f(-1,0,3\pi/4)$ è

$$v = \frac{\nabla f(-1,0,3\pi/4)}{\|\nabla f(-1,0,3\pi/4)\|} = \begin{pmatrix} -2/\sqrt{14} \\ 3/\sqrt{14} \\ -1/\sqrt{14} \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Calcolate l'integrale curvilineo (lavoro) del campo vettoriale $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ di componenti

$$f^1(x,y) = xy^2 \qquad \text{e} \qquad f^2(x,y) = ye^{1-x^2}$$

($(x,y) \in \mathbb{R}^2$) lungo la curva parametrica $\gamma\colon [0,\pi/2] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = (\cos t)e_1 + (\operatorname{sen} t)e_2, \qquad t \in [0,\pi/2].$$

Soluzione. Poiché il campo vettoriale f è continuo e la curva parametrica γ è liscia, risulta

$$\begin{aligned}
\int_\gamma f\, dl &= \int_0^{\pi/2} \langle f(\gamma(t)) \,|\, \gamma'(t) \rangle \, dt = \\
&= \int_0^{\pi/2} \left[f^1(\cos t, \operatorname{sen} t)(-\operatorname{sen} t) + f^2(\cos t, \operatorname{sen} t)(\cos t) \right] dt = \\
&= \int_0^{\pi/2} \left(-\cos t \operatorname{sen}^3 t + \cos t \operatorname{sen} t\, e^{1-\cos^2 t} \right) dt = \left(-\frac{1}{4}\operatorname{sen}^4 t + \frac{1}{2} e^{\operatorname{sen}^2 t} \right)\Bigg|_0^{\pi/2} = \cdots = \frac{2e-3}{4}.
\end{aligned}$$

Esercizio 3. Sia
$$f(x,y) = xy, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Determinate gli eventuali punti critici di f e stabilitene la natura.

(b) Determinate il minimo e il massimo globale di f sull'insieme $K = \big\{(x,y):\ 2x^2 + y^4 \le 1\big\}$.

Soluzione. (a) La funzione f è un monomio e quindi è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^2$. Le derivate parziali di f sono date da
$$f_x(x,y) = y \qquad \text{e} \qquad f_y(x,y) = x$$
per ogni (x,y) e quindi l'unico punto critico di f è l'origine $(0,0)$. La matrice hessiana di f in tale punto è
$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$
e quindi l'origine è punto di sella per f poiché la matrice hessiana di f ha determinante negativo in tale punto.

(b) L'insieme K è compatto e la funzione f è continua e quindi per il teorema di Weierstrass esistono il minimo e il massimo globale di f su K. Poiché l'unico punto critico di f interno a K è un punto di sella, gli estremi globali di f su K sono assunti sul bordo di K. Posto
$$\Phi(x,y) = 2x^2 + y^4 - 1, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$
risulta $\partial K = \Phi^{-1}(0)$ e da $\nabla\Phi(x,y) \ne (0,0)$ per ogni $(x,y) \ne (0,0)$ e da $(0,0) \notin \partial K$ segue che ∂K è una curva (1−varietà) regolare in $\mathbb{R}^2$ e quindi gli estremi globali di f su ∂K possono essere determinati con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Il sistema dei moltiplicatori di Lagrange è dato da
$$\begin{cases} y - 4\lambda x = 0 \\ x - 4\lambda y^3 = 0 \end{cases}$$
cui va aggiunta l'equazione che esprime l'appartenenza del punto a ∂K. Una soluzione è data da $x = y = 0$ che è un punto che non appartiene a ∂K. Altrimenti, con $x, y \ne 0$, deve essere $\lambda \ne 0$ e
$$\begin{cases} x = 4\lambda y^3 \\ y - 16\lambda^2 y^3 = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x = 4\lambda y^3 \\ y\left(1 - 16\lambda^2 y^2\right) = 0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} x = \pm\dfrac{1}{16\lambda^2}\operatorname{sgn}\lambda; \\ y = \pm\dfrac{1}{4|\lambda|} \end{cases}$$
da cui, sostituendo nell'equazione che esprime l'appartenenza a ∂K, segue
$$2x^2 + y^4 = \frac{3}{64\lambda^4} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda^4 = \frac{3}{64} \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = \pm\frac{\sqrt[4]{3}}{4}.$$
Si ottengono così le due coppie di punti di coordinate
$$P_\pm = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \pm\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right) \qquad \text{e} \qquad Q_\pm = \left(\pm\frac{1}{\sqrt{3}}, \mp\frac{1}{\sqrt[4]{3}}\right).$$
Di tali punti, quelli con segno concorde delle coordinate sono punti di massimo globale di f in K mentre quelli con coordinate di segno discorde sono punti di minimo globale di f in K. Risulta quindi
$$\max_K f = \frac{1}{\sqrt[4]{27}} \qquad \text{e} \qquad \min_K f = \frac{1}{\sqrt[4]{27}}.$$
Alternativamente, tenuto conto che la funzione f è dispari in ciascuna variabile, è possibile rappresentare la parte del bordo di K contenuta nel semipiano con $x \ge 0$ come sostegno della curva cartesiana parametrizzata da
$$\gamma(y) = \sqrt{\frac{1-y^4}{2}}\, e_1 + y e_2, \qquad |y| \le 1.$$
e, studiando il grafico della funzione $y \in [-1,1] \mapsto f(\gamma(y))$, si perviene alla conclusione già ottenuta.

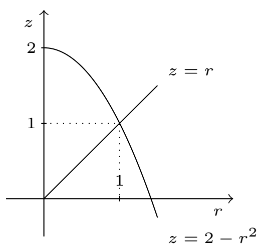
Esercizio 4. Sia

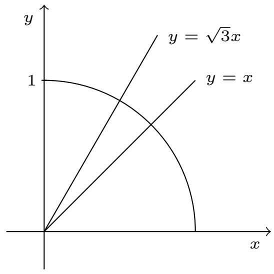
$$K = \left\{ (x\,, y\,, z) : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2 - \left(x^2+y^2\right) \text{ e } x \le y \le \sqrt{3}x \right\}.$$

(a) Descrivete l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K y\, d(x\,, y\,, z)$.

Soluzione. L'insieme K è l'intersezione della parte del poliedro definito dai piani $y = x$ e $y = \sqrt{3}x$ contenuta nel semispazio $x \ge 0$ con il solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la figura contenuta nel primo quadrante del piano rz (con $r = \sqrt{x^2+y^2}$) che sta sopra la retta di equazione $z = r$ e sotto la parabola di equazione $z = 2 - r^2$ come illustrato nella figura a sinistra.





L'insieme K è compatto perché è limitato ed è intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue e quindi è (Lebesgue) misurabile. La funzione $(x\,, y\,, z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto y$ è lineare e quindi è integrabile in K.
Calcoliamo l'integrale I mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione di K sul piano xy è l'insieme

$$\pi_{xy}(K) = \left\{ (x\,, y) : \sqrt{x^2+y^2} \le 1 \text{ e } 0 \le x \le y \le \sqrt{3}x \right\}$$

rappresentato nella figura a destra e per ogni $(x\,, y) \in \pi_{xy}(K)$ la corrispondente sezione è l'intervallo

$$K_{(x,y)} = \left[\sqrt{x^2+y^2}\,, 2 - \left(x^2+y^2\right) \right], \qquad (x\,, y) \in \pi_{xy}(K).$$

Per la formula di riduzione si ha allora

$$\begin{aligned} I = \int_K y\, d(x\,, y\,, z) &= \int_{\pi_{xy}(K)} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2-(x^2+y^2)} y\, dz \right) d(x\,, y) = \\ &= \int_{\pi_{xy}(K)} y \left[2 - (x^2+y^2) - \sqrt{x^2+y^2} \right] d(x\,, y) = \end{aligned}$$

e quindi, utilizzando coordinate polari per calcolare l'integrale a destra, si ottiene

$$\begin{aligned} &= \left(\int_{\pi/4}^{\pi/3} \operatorname{sen}\theta\, d\theta \right) \cdot \left(\int_0^1 \left(2r^2 - r^3 - r^4\right) r\, dr \right) = \\ &= -\cos\theta \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} \cdot \left(\frac{2}{3}r^3 - \frac{1}{4}r^4 - \frac{1}{5}r^5 \right) \Big|_1^2 = \\ &= \left(\frac{1}{\sqrt{2}} - \frac{1}{2} \right) \cdot \left(\frac{2}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{5} \right) = \frac{13}{120} \left(\sqrt{2} - 1 \right). \end{aligned}$$

Esercizio 5. Data l'equazione differenziale

$$x''(t) + 4x'(t) + 5x(t) = \frac{1}{e^{2t} \operatorname{sen} t}, \qquad 0 < t < \pi,$$

determinate

(a) tutte le soluzioni $x(t)$ dell'equazione differenziale;

(b) la soluzione $x(t)$ tale che $x(\pi/2) = x'(\pi/2) = 0$.

Soluzione. (a) L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$ le cui soluzioni complesse e coniugate sono date da $\lambda_\pm = -2 \pm i$. Quindi, le funzioni

$$x_1(t) = e^{-2t} \cos t; \qquad x_2(t) = e^{-2t} \operatorname{sen} t;$$

con $t \in \mathbb{R}$ sono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e si può procedere alla ricerca di una soluzione dell'equazione completa con il metodo di variazione delle costanti arbitrarie cercando una soluzione della forma

$$x_p(t) = c_1(t)e^{-2t} \cos t + c_2(t)e^{-2t} \operatorname{sen} t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con c_1 e c_2 funzioni di classe C^1 in $\mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} c_1'(t)x_1(t) + c_2'(t)x_2(t) = 0 \\ c_1'(t)x_1'(t) + c_2'(t)x_2'(t) = \dfrac{1}{e^{2t} \operatorname{sen} t} \end{cases} \qquad 0 < t < \pi.$$

Deve quindi essere

$$\begin{cases} c_1'(t)e^{-2t} \cos t + c_2'(t)e^{-2t} \operatorname{sen} t = 0 \\ c_1'(t) \left[-2e^{-2t} \cos t - e^{-2t} \operatorname{sen} t\right] + c_2'(t) \left[-2e^{-2t} \operatorname{sen} t + e^{-2t} \cos t\right] = \dfrac{1}{e^{2t} \operatorname{sen} t} \end{cases}$$

con $0 < t < \pi$ da cui segue

$$\begin{cases} c_1'(t) \cos t + c_2'(t) \operatorname{sen} t = 0 \\ -c_1'(t) \operatorname{sen} t + c_2'(t) \cos t = \dfrac{1}{\operatorname{sen} t} \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} c_1'(t) = -1 \\ c_2'(t) = \dfrac{\cos t}{\operatorname{sen} t} \end{cases}$$

con $0 < t < \pi$. Integrando, si trova (a meno di costanti arbitrarie)

$$c_1(t) = -t \qquad \text{e} \qquad c_2(t) = \log(\operatorname{sen} t)$$

per $0 < t < \pi$ da cui segue

$$x_p(t) = -te^{-2t} \cos t + \log(\operatorname{sen} t)e^{-2t} \operatorname{sen} t, \qquad 0 < t < \pi.$$

Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono le funzioni

$$x(t) = (C_1 - t)e^{-2t} \cos t + [C_2 + \log(\operatorname{sen} t)]\, e^{-2t} \operatorname{sen} t, \qquad 0 < t < \pi,$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
(b) Tenendo conto di (a), scegliamo le costanti $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ in modo che risulti $x(\pi/2) = x'(\pi/2) = 0$. Si ha

$$\begin{cases} x(\pi/2) = C_2 e^{-\pi} = 0 \\ x'(\pi/2) = (C_1 - \pi/2)e^{-\pi} - 2C_2 e^{-\pi} = 0 \end{cases}$$

da cui segue $C_1 = \pi/2$ e $C_2 = 0$. La soluzione cercata è dunque la funzione

$$x(t) = (\pi/2 - t)e^{-2t} \cos t + \log(\operatorname{sen} t)e^{-2t} \operatorname{sen} t, \qquad 0 < t < \pi.$$
