COGNOME	______________________	NON SCRIVERE QUI	
NOME	______________________	1 | 2 | 3 | 4 | 5	
MATRICOLA	|_|_|_|_|_|_|		
LAUREA	CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC		

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA
ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI
A.A. 2022-2023 — PARMA, 7 SETTEMBRE 2023

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Calcolate l'integrale curvilineo

$$I = \int_\gamma 60xy\, dl(x,y)$$

ove $\gamma \colon [0,\sqrt{2}] \to \mathbb{R}^2$ è la curva parametrica definita da

$$\gamma(t) = te_1 + t^2 e_2, \qquad t \in [0,\sqrt{2}].$$

Soluzione. Poiché la curva parametrica γ è liscia e la funzione $f(x,y) = 60xy$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ è continua, risulta

$$I = \int_\gamma f\, dl = \int_0^{\sqrt{2}} f(t,t^2)\|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^{\sqrt{2}} 60t^3\sqrt{1+4t^2}\, dt = 30\int_0^2 s\sqrt{1+4s}\, ds.$$

Procedendo per parti due volte si trova

$$\int s\sqrt{1+4s}\, ds = \frac{1}{6}s(1+4s)^{3/2} - \frac{1}{60}(1+4s)^{5/2} + C, \qquad s > -1/4,$$

con $C \in \mathbb{R}$ costante arbitraria da cui segue infine

$$I = 30\int_0^2 s\sqrt{1+4s}\, ds = 30\left\{\frac{1}{6}s(1+4s)^{3/2} - \frac{1}{60}(1+4s)^{5/2}\right\}\Bigg|_0^2 = 30\left(\frac{54}{6} - \frac{242}{60}\right) = 149.$$

Esercizio 2. Scrivete l'equazione del piano ortogonale al gradiente della funzione

$$f(x,y,z) = x^2y + y^2z - xz^2 - z, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

nel punto $P = (1,-1,1)$ e contenente tale punto.

Soluzione. La funzione f è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^3$ e l'equazione del piano tangente alla superficie di livello di f nel punto $P = (1,-1,1)$ e contenete tale punto è

$$f_x(1,-1,1)(x-1) + f_y(1,-1,1)(y+1) + f_z(1,-1,1)(z-1) = 0$$

a condizione che il gradiente di f nel punto $P = (1,-1,1)$ sia non nullo. Le derivate parziali di f sono

$$f_x(x,y,z) = 2xy - z^2; \qquad f_y(x,y,z) = x^2 + 2yz; \qquad f_y(x,y,z) = y^2 - 2xz - 1;$$

per ogni (x,y,z) da cui segue

$$f_x(1,-1,1) = -3; \qquad f_y(1,-1,1) = -1; \qquad f_z(1,-1,1) = -2.$$

Sostituendo nell'equazione del piano risulta $-3(x-1) - (y+1) - 2(z-1) = 0$ da cui segue

$$x + y + 2z = 4$$

che è l'equazione cercata.

Esercizio 3. Determinate la funzione $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ in modo tale che il campo vettoriale $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ di componenti

$$\begin{cases} f^1(x,y,z) = xg(y,z) \\ f^2(x,y,z) = x^2 \operatorname{sen}(2y) \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \\ f^3(x,y,z) = x^2 \mathrm{e}^{-2z} \end{cases}$$

sia conservativo e il lavoro compiuto dal campo f lungo una qualunque curva parametrica liscia a tratti che connette l'origine con il punto di coordinate $(1, \pi, 1)$ sia nullo.

Soluzione. Per ogni funzione g di classe C^1 in $\mathbb{R}^2$ il campo vettoriale f risulta a sua volta essere di classe C^1 in $\mathbb{R}^3$ cosicché, essendo $\mathbb{R}^3$ un aperto convesso, esso è conservativo se e solo se è irrotazionale ovvero se e solo se risulta

$$f^1_y(x,y,z) = f^2_x(x,y,z); \qquad f^1_z(x,y,z) = f^3_x(x,y,z); \qquad f^2_z(x,y,z) = f^3_y(x,y,z);$$

per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Le derivate in croce di f sono date da

$$\begin{aligned} &f^1_y(x,y,z) = xg_y(y,z); && f^1_z(x,y,z) = xg_z(y,z); \\ &f^2_x(x,y,z) = 2x \operatorname{sen}(2y); && f^2_z(x,y,z) = 0; \\ &f^3_x(x,y,z) = 2x\mathrm{e}^{-2z}; && f^3_y(x,y,z) = 0; \end{aligned}$$

per ogni (x,y,z) e quindi il campo f risulta irrotazionale in $\mathbb{R}^3$ se e solo si ha

$$\begin{aligned} g_y(y,z) &= 2 \operatorname{sen}(2y); \\ g_z(y,z) &= 2\mathrm{e}^{-2z}; \end{aligned}$$

per ogni $(y,z) \in \mathbb{R}^2$ da cui segue evidentemente

$$g(y,z) = -\cos(2y) - \mathrm{e}^{-2z} + C, \qquad (y,z) \in \mathbb{R}^2,$$

con $C \in \mathbb{R}$ costante arbitraria. Per tali funzioni g, il campo vettoriale f è conservativo e un suo potenziale è dato da

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= \int_0^x f^1(t,0,0)\,dt + \int_0^y f^2(x,t,0)\,dt + \int_0^z f^3(x,y,t)\,dt = \\ &= \int_0^x tg(0,0)\,dt + \int_0^y x^2 \operatorname{sen}(2t)\,dt + \int_0^z x^2\mathrm{e}^{-2t}\,dt = \\ &= \frac{x^2}{2}(C-2) - \frac{1}{2}\cos(2t)\Big|_0^y - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t}\Big|_0^1 = \frac{x^2}{2}\left(C - \cos(2y) - \mathrm{e}^{-2z)}\right) \end{aligned}$$

per ogni (x,y,z). Scegliamo infine la costante C in modo che il lavoro L compiuto dal campo lungo una qualunque curva parametrica liscia a tratti avente come estremi l'origine e il punto di coordinate $(1, \pi, 1)$ sia nullo. Essendo il campo vettoriale f conservativo, tale lavoro L è dato da

$$L = F(1, \pi, 1) - F(0,0,0) = \frac{1}{2}\left(C - 1 - \mathrm{e}^{-2}\right)$$

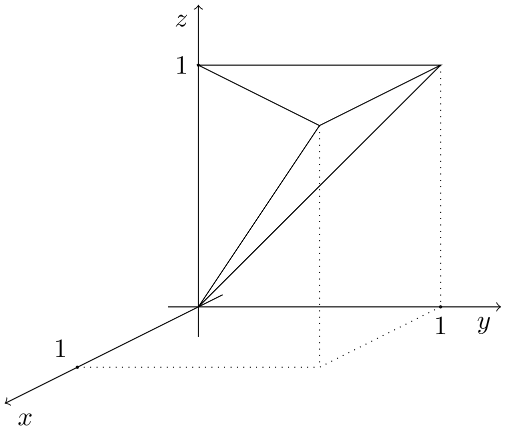
e quindi risulta $L = 0$ per $C = 1 + \mathrm{e}^{-2}$.

Esercizio 4. Sia
$$K = \{(x, y, z) : 0 \le x \le y \le z \le 1\}.$$

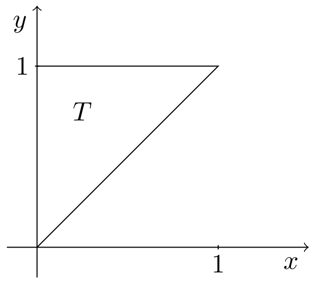
(a) Descrivete e disegnate l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \int_K xy \, d(x, y, z)$.

Soluzione. (a) L'insieme K è il tetraedro individuato dai piani $x = 0$, $x = y$ e $y = z$ e $z = 1$. Esso è rappresentato in Figura (1).



(1)



(2)

(b) L'insieme K è chiuso in quanto intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni lineari ed è evidentemente limitato poiché è $0 \le x \le y \le z \le 1$. Pertanto K è compatto e quindi (Lebesgue) misurabile. Inoltre, la funzione

$$f(x, y, z) = xy, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

è un polinomio e quindi è integrabile su ogni insieme compatto.
Calcoliamo l'integrale di f su K mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione di K sul piano xy è il triangolo
$$T = \pi_{xy}(K) = \{(x, y) : 0 \le x \le y \le 1\},$$
(Figura (2)) e le corrispondenti sezioni sono gli intervalli

$$K_{(x,y)} = [y, 1], \qquad (x, y) \in T.$$

Per la formula di riduzione si ha allora

$$I = \int_T \left(\int_y^1 xy \, dz \right) d(x, y) = \int_T xy(1 - y) \, d(x, y)$$

e per la stessa formula risulta poi

$$\begin{aligned}
\int_T xy(1 - y) \, d(x, y) &= \int_0^1 \left(\int_x^1 x(y - y^2) \, dy \right) dx = \\
&= \int_0^1 x \left(\frac{y^2}{2} - \frac{y^3}{3} \right) \Big|_x^1 dx = \\
&= \int_0^1 x \left(\frac{1}{6} - \frac{x^2}{2} + \frac{x^3}{3} \right) dx = \\
&= \left(\frac{x^2}{12} - \frac{x^4}{8} + \frac{x^5}{15} \right) \Big|_0^1 = \frac{1}{12} - \frac{1}{8} + \frac{1}{15} = \frac{1}{40}.
\end{aligned}$$

Esercizio 5. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = \cos t \left([x(t)]^2 + x(t)\right) \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

determinate

(a) la soluzione massimale corrispondente al dato iniziale $x_0 = -1/2$;

(b) per quali valori del dato iniziale $x_0 > 0$ la soluzione $x(t)$ è definita per ogni t.

Soluzione. L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili. La funzione a secondo membro è $f(t, x) = g(t)h(x)$ con

$$g(t) = \cos t, \qquad t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad h(x) = x^2 + x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

e, essendo entrambe le funzioni g e h infinite volte derivabili, il problema di Cauchy considerato ha soluzione massimale $x \in C^\infty(\alpha, \beta)$ con $-\infty \le \alpha < 0 < \beta \le +\infty$. Tale soluzione è prolungamento di ogni altra soluzione del medesimo problema di Cauchy.
Poiché risulta $h(x) = 0$ solo per $x = -1$ e $x = 0$, a tali dati iniziali $x_0 = 0$ e $x_0 = -1$ corrispondono le soluzioni stazionarie $x(t) = 0$ e $x(t) = -1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ e quindi, posto per bervità

$$J(x_0) = \begin{cases} (-\infty, -1) & \text{se } x_0 < -1 \\ (-1, 0) & \text{se } -1 < x_0 < 0 \\ (0, +\infty) & \text{se } x_0 > 0, \end{cases}$$

per il teorema di unicità le soluzioni massimali corrispondenti a dati iniziali $x_0 \notin \{-1, 0\}$ verificano la condizione $x(t) \in J(x_0)$ per ogni $\alpha < t < \beta$. Ponendo

$$H(y) = \int_{-1/2}^{y} \frac{1}{z^2 + z}\, dz = \int_{-1/2}^{y} \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\right) dz = \log\left|\frac{y}{y+1}\right| - \log\left|\frac{x_0}{x_0+1}\right|, \qquad y \in J(x_0),$$

si deduce che la funzione composta $H \circ x$ è in $C^\infty(\alpha, \beta)$ e verifica

$$(H \circ x)'(t) = \cos t \quad \forall\, t \in (\alpha, \beta) \qquad \text{e} \qquad H \circ x(0) = 0.$$

Pertanto, per il teorema fondamentale del calcolo, deve essere $(H \circ x)(t) = \operatorname{sen} t$ per $\alpha < t < \beta$ da cui segue con semplici calcoli

$$x(t) = \frac{\dfrac{x_0}{1+x_0} \mathrm{e}^{\operatorname{sen} t}}{1 - \dfrac{x_0}{1+x_0} \mathrm{e}^{\operatorname{sen} t}}, \qquad \alpha < t < \beta.$$

(a) Per $x_0 = -1/2$ la soluzione diviene

$$x(t) = -\frac{\mathrm{e}^{\operatorname{sen} t}}{1 + \mathrm{e}^{\operatorname{sen} t}}, \qquad \alpha < t < \beta,$$

e, tenuto conto che risulta

$$\begin{cases} \lim\limits_{y \to -1^+} H(y) = +\infty \\ \lim\limits_{y \to 0^-} H(y) = -\infty, \end{cases}$$

deve si conclude che deve essere $\alpha = -\infty$ e $\beta = +\infty$.
(b) Per $x_0 > 0$ si ha

$$\begin{cases} \lim\limits_{y \to 0^+} H(y) = -\infty \\ \lim\limits_{y \to 0^-} H(y) = \log(1 + 1/x_0) \end{cases}$$

e quindi deve essere

$$\operatorname{sen} t < \log(1 + 1/x_0), \qquad \alpha < t < \beta,$$

e ciò avviene per ogni $t \in \mathbb{R}$ se risulta $1 + 1/x_0 > \mathrm{e}$ da cui segue $0 < x_0 < 1/(\mathrm{e} - 1)$.