COGNOME	____________________	NON SCRIVERE QUI	
NOME	____________________	1 2 3 4 5	
MATRICOLA			
LAUREA	CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC		

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA
ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI
A.A. 2022-2023 — PARMA, 18 LUGLIO 2023

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Calcolate la lunghezza $L(\gamma)$ della curva parametrica $\gamma\colon [0, 2^{3/4}] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = 3t^4 e_1 + 2t^6 e_2, \qquad 0 \le t \le 2^{3/4}.$$

Soluzione. La curva γ è liscia e quindi è rettificabile. Si ha

$$\gamma'(t) = 12t^3 e_1 + 12t^5 e_2, \qquad 0 \le t \le 2^{3/4},$$

da cui segue

$$L(\gamma) = \int_0^{2^{3/4}} \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^{2^{3/4}} 12t^3\sqrt{1+t^4}\, dt = 2\left(1+t^4\right)^{3/2}\Big|_0^{2^{3/4}} = 2(27-1) = 52.$$

Esercizio 2. Determinate $a \in \mathbb{R}$ in modo che il campo vettoriale $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ di componenti $f = (f^1, f^2)$ definite da

$$f^1(x,y) = ax\cos y + y^2\cos x; \qquad f^2(x,y) = ay\operatorname{sen} x - x^2\operatorname{sen} y;$$

per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sia conservativo e per tale a calcolate il potenziale $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ di f che si annulla nel punto di coordinate $(\pi/2, \pi)$.

Soluzione. Poiché $\mathbb{R}^2$ è convesso e il campo vettoriale f è di classe C^∞, esso è conservativo in $\mathbb{R}^2$ se e solo se è irrotazionale ovvero risulta $f^1_y = f^2_x$ in $\mathbb{R}^2$. Si ha

$$f^1_y(x,y) = -ax\operatorname{sen} y + 2y\cos x \qquad \text{e} \qquad f^2_x(x,y) = ay\cos x - 2x\operatorname{sen} y$$

per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e deve quindi aversi

$$-ax\operatorname{sen} y + 2y\cos x = ay\cos x - 2x\operatorname{sen} y \quad\Longleftrightarrow\quad (2-a)[x\operatorname{sen} y + y\cos x] = 0$$

per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ da cui segue necessariamente $a = 2$ come si vede ponendo ad esempio $x = 0$ e $y = \pi/2$. Per $a = 2$ il campo vettoriale $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ è quindi conservativo e tutti i suoi potenziali $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ sono dati da

$$\begin{aligned} F(x,y) &= \int_0^x f^1(t,0)\, dt + \int_0^y f^2(x,t)\, dt + C = \\ &= \int_0^x 2t\, dt + \int_0^y \left(2t\operatorname{sen} x - x^2\operatorname{sen} t\right)\, dt + C = x^2\cos y + y^2\operatorname{sen} x + C \end{aligned}$$

per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ al variare della costante $C \in \mathbb{R}$. Imponendo che sia $F(\pi/2, \pi) = 0$ si trova $C = -3\pi^2/4$ e quindi il potenziale cercato è

$$F(x,y) = x^2\cos y + y^2\operatorname{sen} x - 3\pi^2/4, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Esercizio 3. Sia
$$\Gamma = \left\{(x, y, z) : \ 4x^2 + y^2 + 2z^2 = 9 \text{ e } 2x + y + z = 0\right\}.$$

(a) Descrivete l'insieme Γ e provate che è una curva regolare ($1-$superficie) e compatta di $\mathbb{R}^3$.

(b) Determinate il massimo ed il minimo globale di $f(x, y, z) = 4x + 2y + z$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, su Γ.

Soluzione. (a) L'insieme Γ è dato dall'intersezione tra l'elissoide di equazione $4x^2 + y^2 + 2z^2 = 9$ con il piano di equazione $2x + y + z = 0$.
Sia $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ la funzione di componenti $\Phi = \left(\Phi^1, \Phi^2\right)$ definite da
$$\Phi^1(x, y, z) = 4x^2 + y^2 + 2z^2 - 9 \qquad \text{e} \qquad \Phi^2(x, y, z) = 2x + y + z$$
per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ cosicché risulta $\Gamma = \Phi^{-1}(0, 0)$. Si ha
$$D\Phi(x, y, z) = \begin{pmatrix} 8x & 2y & 4z \\ 2 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$
e quindi risulta $\operatorname{rk} D\Phi(x, y, z) \leq 1$ se e solo se tutti i minori di ordine due della matrice $D\Phi(x, y, z)$ sono nulli, cosa che si verifica solo per $x = y = z = 0$ che sono coordinate di un punto non appartenente a Γ. Quindi Γ è una curva regolare ($1-$superficie) di $\mathbb{R}^3$. Inoltre, l'insieme Γ è chiuso perché controimmagine di un punto mediante Φ ed è contenuto nella palla con centro nell'origine e raggio $R = 3$ poiché si ha
$$(x, y, z) \in \Gamma \qquad \Longrightarrow \qquad x^2 + y^2 + z^2 \leq 4x^2 + y^2 + 2z^2 = 9.$$
Pertanto, Γ è un insieme compatto.
(b) La funzione f assume minimo e massimo globale su Γ per il teorema di Weierstrass. Poiché Γ è una curva regolare, possiamo determinare tali punti con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Il sistema dei moltiplicatori di Lagrange è da
$$\begin{cases} 4 - 8\lambda x - 2\mu = 0 \\ 2 - 2\lambda x - \mu = 0 \\ 1 - 4\lambda z - \mu = 0 \end{cases}$$
cui vanno aggiunte le due equazioni che esprimono l'appartenenza del punto a Γ. Deve essere chiaramente $\lambda \neq 0$ da cui segue
$$x = \frac{2-\mu}{4\lambda}; \qquad y = \frac{2-\mu}{2\lambda}; \qquad z = \frac{1-\mu}{4\lambda}$$
Imponendo che sia
$$2x + y + z = 2\frac{2-\mu}{4\lambda} + \frac{2-\mu}{2\lambda} + \frac{1-\mu}{4\lambda} = \frac{1}{4\lambda}(9 - 5\mu) = 0$$
si trova $\mu = 9/5$ da cui segue $x = 1/(20\lambda)$, $y = 1/(10\lambda)$ e $z = -1/(5\lambda)$ e sostituendo infine nella rimanente equazione
$$4x^2 + y^2 + 2z^2 = \frac{4}{400\lambda^2} + \frac{1}{100\lambda^2} + \frac{2}{25\lambda^2} = \frac{9}{100\lambda^2} = 9$$
si conclude che deve essere $\lambda = \pm 1/10$ cui corrispondono i (due) punti di coordinate
$$P_\pm = (\pm 1/2, \pm 1, \mp 2).$$
I valori di f in tali punti sono
$$f(P_\pm) = \pm 2$$
da cui si conclude che P_+ e P_- sono rispettivamente punto di massimo globale e minimo globale di f su Γ.

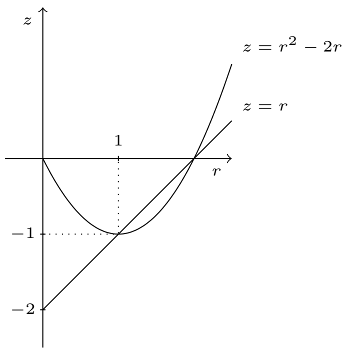
Esercizio 4. Sia

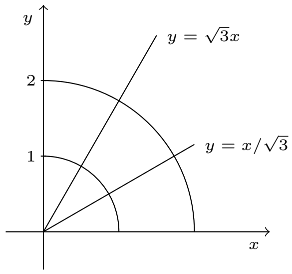
$$K = \left\{(x, y, z) : x^2 + y^2 - 2\sqrt{x^2+y^2} \le z \le \sqrt{x^2+y^2} - 2 \text{ e } x \le \sqrt{3}y \le 3x\right\}.$$

(a) Descrivete l'insieme K.

(b) Calcolate la misura (volume) $|K|$.

Soluzione. L'insieme K è l'intersezione della parte del poliedro definito dai piani $y = x/\sqrt{3}$ e $y = \sqrt{3}x$ contenuta nel semispazio $x \ge 0$ con il solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la figura contenuta nel primo e nel quarto quadrante del piano rz (con $r = \sqrt{x^2+y^2}$) che sta sopra la parabola di equazione $z = r^2 - 2r$ e sotto la retta di equazione $z = r - 2$ come illustrato nella figura a sinistra.





L'insieme K è compatto perché è limitato ed è intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue e quindi è (Lebesgue) misurabile. La sua misura è data da

$$|K| = \int_K 1 \, d(x, y, z).$$

Calcoliamo l'integrale che definisce la misura di K mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione di K sul piano xy è l'insieme

$$\pi_{xy}(K) = \left\{(x, y) : 1 \le \sqrt{x^2+y^2} \le 2 \text{ e } 0 \le \frac{x}{\sqrt{3}} \le y \le \sqrt{3}x\right\}$$

rappresentato nella figura a destra e per ogni $(x, y) \in \pi_{xy}(K)$ la corrispondente sezione è l'intervallo

$$K_{(x,y)} = \left[x^2 + y^2 - 2\sqrt{x^2+y^2}, \sqrt{x^2+y^2} - 2\right], \qquad (x, y) \in \pi_{xy}(K).$$

Per la formula di riduzione si ha allora

$$\begin{aligned} |K| = \int_K 1 \, d(x, y, z) &= \int_{\pi_{xy}(K)} \left(\int_{x^2+y^2-2\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{x^2+y^2}-2} 1 \, dz\right) d(x, y) = \\ &= \int_{\pi_{xy}(K)} \left[\sqrt{x^2+y^2} - 2 - (x^2+y^2) + 2\sqrt{x^2+y^2}\right] d(x, y) = \end{aligned}$$

e quindi, utilizzando coordinate polari per calcolare l'integrale a destra, si ottiene

$$\begin{aligned} &= \left(\int_{\pi/6}^{\pi/3} 1 \, d\theta\right) \cdot \left(\int_1^2 (3r - 2 - r^2) \, r \, dr\right) = \\ &= \frac{\pi}{6} \cdot \left(r^3 - r^2 - \frac{1}{4}r^4\right)\Big|_1^2 = \cdots = \frac{\pi}{24}. \end{aligned}$$

Esercizio 5. Data l'equazione differenziale

$$x''(t) - x'(t) = -\mathrm{e}^{2t}\cos(\mathrm{e}^t),$$

determinate

(a) tutte le soluzioni $x(t)$ dell'equazione differenziale;

(b) la soluzione $x(t)$ tale che $x(\log\pi) = x'(\log\pi) = 0$.

Soluzione. (a) L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - \lambda = 0$ le cui soluzioni sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 1$. Quindi, le funzioni

$$x_1(t) = 1; \qquad x_2(t) = \mathrm{e}^t;$$

con $t \in \mathbb{R}$ sono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e si può cercare una soluzione dell'equazione completa della forma

$$x_p(t) = A\cos(\mathrm{e}^t) + B\,\mathrm{sen}\,(\mathrm{e}^t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Si trova

$$x_p''(t) - x_p'(t) = -A\mathrm{e}^{2t}\cos(\mathrm{e}^t) - B\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{sen}\,(\mathrm{e}^t) = -\mathrm{e}^{2t}\cos(\mathrm{e}^t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

da cui segue $A = 1$ e $B = 0$ ovvero

$$x_p(t) = \cos(\mathrm{e}^t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Alternativamente, si può procedere con il metodo di variazione delle costanti arbitrarie cercando una soluzione della forma

$$x_p(t) = c_1(t)\mathrm{e}^{2t}\cos t + c_2(t)t\mathrm{e}^{2t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con c_1 e c_2 funzioni di classe C^1 in $\mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} c_1'(t)x_1(t) + c_2'(t)x_2(t) = 0 \\ c_1'(t)x_1'(t) + c_2'(t)x_2'(t) = -\mathrm{e}^{2t}\cos(\mathrm{e}^t). \end{cases}$$

Deve quindi essere

$$\begin{cases} c_1'(t) + c_2'(t)\mathrm{e}^t = 0 \\ c_2'(t)\mathrm{e}^t = -\mathrm{e}^{2t}\cos(\mathrm{e}^t) \end{cases} \implies \begin{cases} c_1'(t) = \mathrm{e}^{2t}\cos(\mathrm{e}^t) \\ c_2'(t) = -\mathrm{e}^t\cos(\mathrm{e}^t) \end{cases}$$

e integrando si trova (a meno di costanti arbitrarie)

$$\begin{aligned} c_1(t) &= \int \mathrm{e}^{2t}\cos(\mathrm{e}^t)\,dt = \int u\cos u\,du\Big|_{u=\mathrm{e}^t} = u\,\mathrm{sen}\,u + \cos u\Big|_{u=\mathrm{e}^t} = \mathrm{e}^t\,\mathrm{sen}\,(\mathrm{e}^t) + \cos(\mathrm{e}^t) \\ c_2(t) &= \mathrm{sen}\,(\mathrm{e}^t) \end{aligned}$$

per $t \in \mathbb{R}$ da cui segue $x_p(t) = \cos(\mathrm{e}^t)$, $t \in \mathbb{R}$ come prima. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione sono le funzioni

$$x(t) = C_1 + C_2\mathrm{e}^t + \cos(\mathrm{e}^t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.

(b) Tenendo conto di (a), scegliamo le costanti $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ in modo che risulti $x(\log\pi) = -1$ e $x'(\log\pi) = \pi$. Si ha

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + C_2\pi - 1 = 0 \\ x'(0) = C_2\pi = 0 \end{cases}$$

da cui segue $C_1 = 1$ e $C_2 = 0$. La soluzione cercata è dunque la funzione

$$x(t) = 1 + \cos(\mathrm{e}^t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$
