COGNOME	______________________	NON SCRIVERE QUI
NOME	______________________	1 | 2 | 3 | 4 | 5
MATRICOLA	|_|_|_|_|_|_|	
LAUREA	CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC	

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA
ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI
A.A. 2022-2023 — PARMA, 13 GIUGNO 2023

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Calcolate l'integrale curvilineo (lavoro) del campo vettoriale $f\colon \mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\} \to \mathbb{R}^2$ di componenti

$$f^1(x,y) = \frac{x^2 - y}{x^2 + y^2} \qquad \text{e} \qquad f^2(x,y) = \frac{x}{x^2 + y^2}$$

$(x^2 + y^2 > 0)$ lungo la curva parametrica $\gamma\colon [0, \pi/2] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = (3\cos t)e_1 + (3\operatorname{sen} t)e_2, \qquad t \in [0, \pi/2].$$

Soluzione. Poiché il campo vettoriale f è continuo e la curva parametrica γ è liscia e ha sostegno contenuto nel dominio $\mathbb{R}^2 \setminus \{(0,0)\}$ di f, risulta

$$\begin{aligned}\int_\gamma f\, dl &= \int_0^{\pi/2} \langle f(\gamma(t)) \,|\, \gamma'(t)\rangle\, dt = \\ &= \int_0^{\pi/2} \big(f^1(3\cos t, 3\operatorname{sen} t)(-3\operatorname{sen} t) + f^2(3\cos t, 3\operatorname{sen} t)(3\cos t)\big)\, dt = \\ &= \int_0^{\pi/2} \big(-3\cos^2 t \operatorname{sen} t + 1\big)\, dt = \big(\cos^3 t + t\big)\Big|_0^{\pi/2} = \pi/2 - 1.\end{aligned}$$

Esercizio 2. Determinate per quali valori di $\alpha \in \mathbb{R}$ la funzione

$$x_\alpha(t) = \frac{1 + t^\alpha}{2 + t^2}, \qquad t > 0,$$

è soluzione dell'equazione differenziale

$$x'(t) = \frac{2t}{(1 + t^2)^2}[x(t)]^2.$$

Soluzione. Senza risolvere l'equazione differenziale, osserviamo che per ogni $t > 0$ risulta

$$x'_\alpha(t) = \frac{\alpha t^{\alpha-1}(2 + t^2) - 2t(1 + t^\alpha)}{(2 + t^2)^2} = \frac{(\alpha - 2)t^{\alpha+1} + 2\alpha t^{\alpha-1} - 2t}{(2 + t^2)^2}$$

cosicché, moltiplicando e dividendo a destra per il fattore $(1 + t^\alpha)^2$, risulta

$$x'_\alpha(t) = \frac{(\alpha - 2)t^{\alpha+1} + 2\alpha t^{\alpha-1} - 2t}{(1 + t^\alpha)^2}[x_\alpha(t)]^2$$

per ogni $t > 0$. Deve quindi essere

$$\frac{(\alpha - 2)t^{\alpha+1} + 2\alpha t^{\alpha-1} - 2t}{(1 + t^\alpha)^2} = \frac{2t}{(1 + t^2)^2}$$

per ogni $t > 0$. Questa uguaglianza è evidentemente un'identità per ogni $t > 0$ per $\alpha = 2$ e non ci sono altri valori di α per cui ciò accada poiché ad esempio per $t = 1$ l'uguaglianza diviene $(3\alpha - 4)/4 = 1/2$ che non ha altre soluzioni oltre a $\alpha = 2$.

Esercizio 3. Sia
$$f(x,y,z) = x^2y + y^2z - xz^2 - 9z, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Determinate gli eventuali punti critici di f e stabilitene la natura.

(b) Determinate il minimo e il massimo globale di f sull'insieme $K = \big\{(x,y,z) : \, x^2 + z^2 \leq 9 \text{ e } y = 3\big\}$.

Soluzione. (a) La funzione f è un polinomio e quindi è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^3$. Le derivate parziali di f sono date da

$$f_x(x,y,z) = 2xy - z^2; \qquad f_y(x,y,z) = x^2 + 2yz; \qquad f_z(x,y,z) = y^2 - 2xz - 9;$$

per ogni (x,y,z) e quindi i punti critici sono i punti di coordinate (x,y,z) che sono soluzioni del sistema formato dalle equazioni

$$z^2 - 2xz = 0; \qquad x^2 + 2yz = 0; \qquad y^2 - 2xz = 9.$$

Se $x = 0$, dalla prima equazione segue $z = 0$ e dalla terza $y = \pm 3$. Allo stesso modo, se $z = 0$, dalla seconda equazione segue $x = 0$ e dalla terza equazione $y = \pm 3$ come prima. Avendo determinato le soluzioni del sistema con $x = 0$ o $z = 0$, possiamo ricercare le eventuali soluzioni con $x \neq 0$ e $z \neq 0$. Moltiplicando le prime due equazioni per z e per x rispettivamente, si ottiene

$$x,z \neq 0 \quad \text{e} \quad \begin{cases} z^3 = 2xyz \\ x^3 = -2xyz \\ y^2 - 2xz = 9 \end{cases} \qquad \iff \qquad x,z \neq 0 \quad \text{e} \quad \begin{cases} x^3 + z^3 = 0 \\ x^2 = -2yz \\ y^2 - 2xz = 9. \end{cases}$$

Dalla prima equazione segue che deve essere $z = -x$ e, sostituendo nelle restanti due equazioni, si trovano le soluzioni $x = \pm 2$, $y \pm 1$ e $z = \mp 2$. Pertanto, i punti critici di f sono i punti di coordinate $P_\pm = (0, \pm 3, 0)$ $Q\pm = (\pm 2, \pm 1, \mp 2)$.
Per determinare la natura dei punti critici, consideriamo la matrice hessiana di f che è data da

$$D^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2y & 2x & -2z \\ 2x & 2z & 2y \\ -2z & 2y & -2x \end{pmatrix}, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

i cui minori principali nei punti punti $P_\pm$ e $Q_\pm$ sono

$$\Delta_1 = \pm 6; \quad \Delta_2 = 0; \quad \Delta_3 = \pm 216; \qquad \text{e} \qquad \Delta_1 = \pm 2; \quad \Delta_2 = -24; \quad \Delta_3 = \pm 216;$$

rispettivamente. Poiché in tali punti la matrice hessiana di f ha determinante diverso da zero e non sono verificate le condizioni del criterio di Sylvester corrispondenti ad autovalori di segno costante, in tutti i punti critici $P_\pm$ e $Q_\pm$ la matrice hessiana di f ha due autovalori di segno discorde e quindi tali punti critici risultano essere punti di sella di f.
(b) Dato che l'insieme K è contenuto nel piano $z = 3$, il problema di determinare gli eventuali estremi globali di f su K si riduce al problema di determinare gli estremi globali di

$$g(x,z) = f(x,3,z) = 3x^2 - xz^2, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

sul cerchio $C = \{(x,y) : \, x^2 + y^2 \leq 9\}$. L'insieme C è compatto e la funzione g è un polinomio e quindi per il teorema di Weierstrass esistono il minimo e il massimo globale di g su C e quindi di f su K. Ragionando come nella prima parte, l'unico punto critico di g risulta essere l'origine che non è un estremo locale di g poiché g si annulla in tale punto e cambia di segno in ogni intorno del punto. Gli estremi globali di g su C sono quindi assunti sul bordo di C che è il sostegno della curva parametrica semplice e liscia $\gamma(t)$ di Esercizio 1 definita però questa volta per $t \in [0, \pi/2]$. Esaminando l'andamento della funzione composta

$$g(\gamma(t)) = g(3\cos t, 3\operatorname{sen} t) = 27\cos^2 t - 27\cos t \operatorname{sen}^2 t = 27\cos^3 t + 27\cos^2 t - 27\cos t, \qquad t \in [0, 2\pi],$$

si conclude che il minimo globale di g su C è assunto nei punti di coordinate $(\pm 3, 0)$ e il massimo globale di g su C è assunto nei punti di coordinate $(1, \pm\sqrt{8})$. Conseguentemente, i punti di coordinate $(\pm 3, 3, 0)$ e $(1, 3, \pm\sqrt{8})$ risultano essere punti di massimo globale e di minimo globale di f in K e in tali punti risulta

$$f(\pm 3, 3, 0) = g(\pm 3, 0) = 27 \quad \text{e} \quad f(1, 3, \pm\sqrt{8}) = g(1, \pm\sqrt{8}) = -5.$$

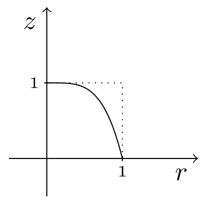
Esercizio 4. Sia

$$K = \{(x, y, z) : \; x^2 + y^2 \le 1 - z^4 \text{ e } x, y \ge 0\} .$$

(a) Descrivete l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K x^2 \, d(x, y, z)$.

Soluzione. L'insieme K è la parte contenuta nell'intersezione dei semispazi $x \ge 0$ e $y \ge 0$ del solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la figura contenuta nel primo quadrante del piano rz (con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$) che sta al di sotto della funzione $z = \sqrt[4]{1 - r^2}$ per $0 \le r \le 1$ come illustrato nella figura seguente.



L'insieme K è compatto perché è limitato ed è intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue e quindi è (Lebesgue) misurabile. La funzione f definita da

$$f(x, y, z) = x^2, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

è un polinomio e quindi è integrabile in K.
Calcoliamo I mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione di K sul piano xy è l'insieme

$$\pi_{xy}(K) = \{(x, y) : \; x^2 + y^2 \le 1 \text{ e } x, y \ge 0\}$$

e per ogni $(x, y) \in \pi_{xy}(K)$ la corrispondente sezione è l'intervallo

$$K_{(x,y)} = \left[0, \sqrt[4]{1 - (x^2 + y^2)}\right] .$$

Per la formula di riduzione si ha allora

$$\begin{aligned} I = \int_K x^2 \, d(x, y, z) &= \int_{\pi_{xy}(K)} \left(\int_0^{\sqrt[4]{1-(x^2+y^2)}} x^2 \, dz \right) d(x, y) = \\ &= \int_{\pi_{xy}(K)} x^2 \sqrt[4]{1 - (x^2 + y^2)} \, d(x, y) \end{aligned}$$

e, utilizzando coordinate polari nel piano abbinate nuovamente alla formula di riduzione, risulta

$$I = \int_{\pi_{xy}(K)} x^2 \sqrt[4]{1 - (x^2 + y^2)} \, d(x, y) = \int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \, d\theta \cdot \int_0^1 r^3 \sqrt[4]{1 - r^2} \, dr.$$

Si ha

$$\int_0^{\pi/2} \cos^2\theta \, d\theta = \frac{\theta + \cos\theta \operatorname{sen}\theta}{2} \bigg|_0^{\pi/2} = \frac{1}{2};$$

$$\int_0^1 r^3 \sqrt[4]{1 - r^2} r \, dr = \frac{1}{2} \int_0^1 s \sqrt[4]{1 - s} \, ds = \cdots = \frac{1}{2} \left[-\frac{4}{5} s (1 - s)^{5/4} - \frac{16}{45} (1 - s)^{9/4} \right] \bigg|_0^1 = \frac{8}{45}$$

da cui segue infine $I = 4/45$.

Esercizio 5. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = [x(t)]^4 \\ x(0) = x_0, \end{cases}$$

determinate

(a) la soluzione massimale corrispondente al dato iniziale $x_0 = -1$;

(b) per quali valori del dato iniziale x_0 la soluzione $x(t)$ è definita per $t = -1/3$.

Soluzione. L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili. La funzione a secondo membro è $f(t, x) = g(t)h(x)$ con

$$g(t) = 1, \qquad t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad h(x) = x^4, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

e, essendo entrambe le funzioni g e h infinite volte derivabili, il problema di Cauchy considerato ha soluzione massimale $x \in C^\infty(\alpha, \beta)$ con $-\infty \leq \alpha < 0 < \beta \leq +\infty$. Tale soluzione è prolungamento di ogni altra soluzione del medesimo problema di Cauchy.
Poiché risulta $h(0) = 0$, la soluzione massimale corrisponente al dato iniziale $x_0 = 0$ è la funzione nulla $x(t) = 0$ per ogni t e quindi per il teorema di unicità le soluzioni massimali corrispondenti a dati iniziali $x_0 \neq 0$ verificano la condizione $x(t) < 0$ per ogni $\alpha < t < \beta$ se $x_0 < 0$ e $x(t) > 0$ per ogni $\alpha < t < \beta$ se $x_0 > 0$. Ponendo

$$H(y) = \int_{x_0}^{y} \frac{1}{z^4}\, dz = -\frac{1}{3z^3}\bigg|_{x_0}^{y} = \frac{1}{3x_0^3} - \frac{1}{3y^3}, \qquad \begin{cases} y < 0 & \text{se } x_0 < 0 \\ y > 0 & \text{se } x_0 > 0 \end{cases}$$

si deduce che la funzione composta $H \circ x$ è in $C^\infty(\alpha, \beta)$ e verifica $(H \circ x)'(t) = 1$ per $\alpha < t < \beta$ e $H \circ x(0) = 0$. Pertanto, per il teorema fondamentale del calcolo, deve essere $(H \circ x)(t) = t$ per $\alpha < t < \beta$ da cui segue con semplici calcoli

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{1/(3x_0^3) - 3t}}, \qquad \alpha < t < \beta.$$

Poiché risulta

$$\begin{cases} \lim\limits_{y \to -\infty} H(y) = 1/(3x_0^3) \\ \lim\limits_{y \to 0^-} H(y) = +\infty \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} \lim\limits_{y \to 0^+} H(y) = -\infty \\ \lim\limits_{y \to +\infty} H(y) = 1/(3x_0^3) \end{cases}$$

si conclude che deve essere $\alpha = 1/(3x_0^3)$ e $\beta = +\infty$ se $x_0 < 0$ e $\alpha = -\infty$ e $\beta = 1/(3x_0^3)$ se $x_0 > 0$. La soluzione massimale è dunque

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt[3]{1/(3x_0^3) 3t + 1}} \qquad \begin{cases} t > 1/(3x_0^3) & \text{se } x_0 < 0 \\ t < 1/(3x_0^3) & \text{se } x_0 > 0. \end{cases}$$

(a) Ponendo $x_0 = -1$ si trova

$$x(t) = -\frac{1}{\sqrt[3]{3t + 1}} \qquad t > -1/3.$$

(b) La soluzione massimale $x(t)$ risulta definita per $t = -1/3$ per ogni $x_0 \geq 0$ e per $1/(3x_0^3) < -1/3$ se $x_0 < 0$ da cui segue $-1 < x_0 < 0$. Pertanto, la soluzione massimale è definita per $t = -1/3$ se e solo se risulta $x_0 > -1$.