Cognome	______________________	Non scrivere qui	
Nome	______________________	1 | 2 | 3 | 4 | 5	
Matricola	⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌋		
Laurea	Civ Amb Gest Inf Eln Tlc Mec		

Università degli Studi di Parma

Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Esame di Analisi Matematica 2 — Soluzioni

A.A. 2022-2023 — Parma, 3 Aprile 2023

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Calcolate il massimo della velocità scalare della curva parametrica $\gamma\colon [0\,,2\pi] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = (3\,\mathrm{sen}\,t)e_1 + (\cos(2t))e_2, \qquad t \in [0\,,2\pi],$$

esprimendo il risultato come frazione ridotta ai minimi termini.

Soluzione. La curva γ è liscia e la velocità scalare al tempo t è la norma $\|\gamma'(t)\|$ del vettore derivata $\gamma'(t)$. Occorre quindi calcolare

$$\max_{t\in[0,2\pi]} \|\gamma'(t)\|$$

Tale massimo esiste per il teorema di Weierstrass e per determinarlo conviene cercare il massimo del quadrato della velocità scalare $t \in [0\,,2\pi] \mapsto \|\gamma'(t)\|^2$. Con facili calcoli trigonometrici si ha

$$\|\gamma'(t)\|^2 = 9\cos^2 t + 4\,\mathrm{sen}^2(2t) = 25\cos^2 t - 16\cos^4 t, \qquad t \in [0\,,2\pi],$$

e quindi, ponendo $x = \cos^2 t$, ci siamo ricondotti a cercare il massimo della parabola $\varphi(x) = 25x - 16x^2$ al variare di x nell'intervallo $[0\,,1]$. Tale massimo è assunto nel vertice corrispondente a $x = 25/32$ cui corrispondono i $t \in [0\,,2\pi]$ dati da $t = \pm\arccos(5/4\sqrt{2})$. Si ha infine

$$\|\gamma'(t)\|\Big|_{t=\pm\arccos(5/4\sqrt{2}} = \sqrt{9\cos^2 t + 16\,\mathrm{sen}^2(2t)}\Big|_{t=\pm\arccos(5/4\sqrt{2}} = \sqrt{25x - 16x^2}\Big|_{x=25/32} = \sqrt{\frac{125}{64}} = \frac{25}{8}.$$

Esercizio 2. Determinate tutte le funzioni $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ che rendono conservativo il campo vettoriale $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ di componenti $f = (f^1, f^2)$ definite da

$$\begin{cases} f^1(x\,,y) = 3x^2y + x\,\mathrm{sen}\,y \\ f^2(x\,,y) = g(x\,,y) \end{cases} \qquad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Soluzione. Essendo $\mathbb{R}^2$ convesso, il campo vettoriale f è conservativo in $\mathbb{R}^2$ se e solo se è irrotazionale in $\mathbb{R}^2$ ovvero risulta $f^1_y(x\,,y) = f^2_x(x\,,y)$ per ogni $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$. Deve dunque essere

$$3x^2 + x\cos y = f^1_y(x\,,y) = f^2_x(x\,,y) = g_x(x\,,y) \qquad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2,$$

da cui segue che deve essere

$$g(x\,,y) = x^3 + \frac{x^2}{2}\cos y + h(y), \qquad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2,$$

per una qualsiasi funzione $h \in C^1(\mathbb{R})$.

Esercizio 3. Sia Γ la curva ottenuta come intersezione tra l'ellissoide di equazione $x^2 + 2y^2 + z^2 = 15$ e il piano di equazione $x + y + z = 0$.

(a) Provate che Γ è una curva regolare (1−superficie) e compatta di $\mathbb{R}^3$.

(b) Determinate il massimo ed il minimo globale di $f(x, y, z) = 3x + 3y - 2z$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$, su Γ.

Soluzione. (a) Sia $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ la funzione di componenti $\Phi = \big(\Phi^1, \Phi^2\big)$ definite da

$$\Phi^1(x, y, z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 1 \qquad \text{e} \qquad \Phi^2(x, y, z) = x + y + z$$

per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ cosicché risulta $\Gamma = \Phi^{-1}(0, 0)$. Si ha

$$D\Phi(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 4y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

e quindi risulta $\operatorname{rk} D\Phi(x, y, z) \leq 1$ se e solo se tutti i minori di ordine due della matrice $D\Phi(x, y, z)$ sono nulli, cosa che si verifica solo per $x = y = z = 0$ che sono coordinate di un punto non appartenente a Γ. Quindi Γ è una curva regolare (1−superficie) di $\mathbb{R}^3$. Inoltre, l'insieme Γ è chiuso perché controimmagine di un punto mediante una funzione continua ed è contenuto in una palla con centro nell'origine poiché si ha

$$(x, y, z) \in \Gamma \qquad \Longrightarrow \qquad x^2 + y^2 + z^2 \leq x^2 + 2y^2 + z^2 \leq 15.$$

Pertanto, Γ è un insieme compatto.

(b) La funzione f assume minimo e massimo globale su Γ per il teorema di Weierstrass. Poiché Γ è una curva regolare, possiamo detrminare tali punti con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Il sistema dei moltiplicatori di Lagrange è dato da

$$\begin{cases} 3 - 2\lambda x - \mu = 0 \\ 3 - 4\lambda y - \mu = 0 \\ -2 - 2\lambda z - \mu = 0 \end{cases}$$

cui vanno aggiunte le due equazioni che esprimono l'appartenenza del punto a Γ. Deve chiaramente essere $\lambda \neq 0$ da cui segue

$$x = \frac{3 - \mu}{2\lambda}; \qquad y = \frac{3 - \mu}{4\lambda}; \qquad z = -\frac{2 + \mu}{2\lambda}$$

Imponendo che sia

$$x + y + z = \frac{3 - \mu}{2\lambda} + \frac{3 - \mu}{4\lambda} - \frac{2 + \mu}{2\lambda} = \frac{5}{4\lambda}(1 - \mu) = 0$$

si trova $\mu = 1$ da cui segue $x = 1/\lambda$, $y = 1/2\lambda$ e $z = -3/(2\lambda)$ e sostituendo infine nella rimanente equazione si ottiene l'equazione

$$x^2 + 2y^2 + z^2 = \frac{1}{\lambda^2} + \frac{2}{4\lambda^2} + \frac{9}{4\lambda^2} = \frac{15}{4\lambda^2} = 15$$

da cui si conclude che deve essere $\lambda = \pm 1/2$ cui corrispondono i (due) punti di coordinate

$$P_\pm = (\pm 2, \pm 1, \mp 3)\,.$$

I valori di f in tali punti sono

$$f(P_\pm) = \pm 3$$

e da ciò si conclude che P_+ e P_- sono rispettivamente punto di massimo globale e punto di minimo globale di f su Γ.

Esercizio 4. Sia

$$K = \{(x\,,y\,,z):\ (x+1)^2 + (2y+1)^2 \le z \le 2x+4y+3 \text{ e } x\,,y \ge 0\}\,.$$

(a) Descrivete l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K x\, d(x\,,y\,,z)$.

Soluzione. L'insieme K è la porzione di spazio compresa tra la superficie del paraboloide di equazione $z = (x+1)^2 + (2y+1)^2$ avente vertice nel punto di coordinate $(-1,-1/2,0)$ e asse parallelo all'asse z e il piano di equazione $z = 2x+4y+3$ e contenuta nell'intersezione dei semispazi $x \ge 0$ e $y \ge 0$.
L'insieme K è chiuso perché è intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue (polinomi) ed è limitato poiché per ogni $(x\,,y\,,z) \in K$ risulta

$$\begin{cases} (x+1)^2 + (2y+1)^2 \le 2x+4y+3 \\ x\,,y \ge 0 \\ 0 \le z \le 2x+4y+3 \end{cases} \implies \begin{cases} x^2 + 4y^2 \le 1 \\ x\,,y \ge 0 \\ 0 \le z \le 2x+4y+3 \end{cases} \implies \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 1/2 \\ 0 \le z \le 7. \end{cases}$$

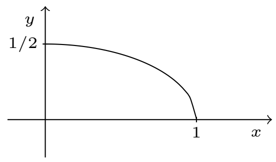
L'insieme K è dunque compatto e quindi è (Lebesgue) misurabile. La funzione $(x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3 \mapsto x$ è lineare e quindi è integrabile in K.
Calcoliamo I mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione di K sul piano xy è la parte dell'ellisse di equazione

$$x^2 + 4y^2 \le 1$$

contenuta nel primo quadrante e quindi è l'insieme

$$\pi_{xy}(K) = \left\{(x\,,y):\ 0 \le y \le \frac{1}{2}\sqrt{1-x^2} \text{ e } 0 \le x \le 1\right\}$$

che è rappresentato nella figura seguente.



Per ogni $(x\,,y) \in \pi_{xy}(K)$, la corrispondente sezione è l'intervallo

$$K_{(x,y)} = \left[(x+1)^2 + (2y+1)^2, 2x+4y+3\right], \qquad (x\,,y) \in \pi_{xy}(K).$$

Per la formula di riduzione (due volte) si ha allora

$$\begin{aligned} I = \int_{\pi_{xy}(K)} \left(\int_{(x+1)^2+(2y+1)^2}^{2x+4y+3} x\, dz\right) d(x\,,y) &= \int_{\pi_{xy}(K)} x\left\{(2x+4y+3) - \left[(x+1)^2 + (2y+1)^2\right]\right\} d(x\,,y) = \\ &= \int_{\pi_{xy}(K)} x\left(1 - x^2 - 4y^2\right) d(x\,,y) = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{1-x^2}/2} x\left(1-x^2-4y^2\right)\, dy\right) dx = \\ &= \frac{1}{3}\int_0^1 \left(1-x^2\right)^{3/2} dx = -\frac{1}{15}\left(1-x^2\right)^{5/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{15}. \end{aligned}$$

Esercizio 5. Data l'equazione differenziale

$$x''(t) - 4x'(t) = 8t - 6 - 3e^t,$$

determinate

(a) tutte le soluzioni dell'equazione differenziale;

(b) la soluzione del problema di Cauchy con $x(0) = 0$ e $x'(0) = 6$.

Soluzione. (a) L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 4\lambda = 0$ le cui soluzioni reali e distinte sono $\lambda_1 = 0$ e $\lambda_2 = 4$. Quindi, le funzioni

$$x_1(t) = 1; \qquad x_2(t) = e^{4t};$$

con $t \in \mathbb{R}$ sono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni

$$x(t) = C_1 + C_2 e^{4t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
Poiché il termine non omogeneo dell'equazione è somma di un polinomio di primo grado e di una funzione esponenziale che non è soluzione dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione dell'equazione completa della forma

$$x_p(t) = At^2 + Bt + Ce^t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $A, B, C \in \mathbb{R}$ costanti da determinare. Si ha allora

$$x_p''(t) - 4x_p'(t) = -8At + (2A - 4B) - 3Ce^t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

da cui segue $A = -1$ e $B = C = 15$.
Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione completa sono le funzioni

$$x(t) = C_1 + C_2 e^{4t} + -t^2 + t + e^t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
(b) Scegliamo le costanti $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ in modo che per la soluzione $x(t)$ definita in (a) risulti $x(0) = 0$ e $x'(0) = 1$. Si ha

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + C_2 + 1 = 0 \\ x'(0) = 4C_2 + 2 = 6 \end{cases}$$

da cui segue $C_1 = -2$ e $C_2 = 1$. La soluzione cercata è dunque la funzione

$$x(t) = e^{4t} + e^t - t^2 + t - 2, \qquad t \in \mathbb{R}.$$