COGNOME	________________	NON SCRIVERE QUI	
NOME	________________	1 | 2 | 3 | 4 | 5	
MATRICOLA	|_|_|_|_|_|_|		
LAUREA	CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC		

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI

A.A. 2022-2023 — PARMA, 7 FEBBRAIO 2023

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Calcolate la lunghezza $L(\gamma)$ della curva parametrica $\gamma\colon [4/3, 32/9] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = te_1 + t^{3/2}e_2, \qquad 4/3 \le t \le 32/9.$$

Soluzione. La curva γ è liscia e quindi è rettificabile. Si ha

$$\gamma'(t) = e_1 + \left(3\sqrt{t}/2\right) e_2, \qquad 4/3 \le t \le 32/9,$$

da cui segue

$$L(\gamma) = \int_{4/3}^{32/9} \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_{4/3}^{32/9} \sqrt{1 + \frac{9}{4}t}\, dt = \frac{8}{27}\left(1 + \frac{9}{4}t\right)^{3/2}\Bigg|_{4/3}^{32/9} = \frac{152}{27}.$$

Esercizio 2. Determinate e disegnate l'insieme A dei punti in cui la matrice hessiana della funzione $f(x, y) = x^3 + xy^2$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è definita positiva.

Soluzione. La funzione f è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^2$ e la matrice hessiana di f è

$$D^2 f(x, y) = \begin{pmatrix} 6x & 2y \\ 2y & 2x \end{pmatrix}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Denotati con $\lambda_1(x, y) \le \lambda_2(x, y)$ gli autovalori di $D^2 f(x, y)$, risulta

$$\begin{matrix} D^2 f(x,y) \\ \text{definita positiva} \end{matrix} \iff \begin{cases} \lambda_1(x, y) > 0 \\ \lambda_2(x, y) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \det\left(D^2 f(x, y)\right) > 0 \\ \operatorname{tr}\left(D^2 f(x, y)\right) > 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 12x^2 - 4y^2 > 0 \\ 8x > 0. \end{cases}$$

Risulta quindi

$$A = \left\{(x, y) :\ |y| < \sqrt{3}x \text{ e } x > 0\right\}$$

che è la porzione di piano contenuta nel semipiano $x > 0$ tra le rette di equazione $y = \pm\sqrt{3}x$.

Esercizio 3. Determinate la funzione $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ tale che $g(0,0) = 2$ che rende il campo vettoriale $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ di componenti

$$\begin{cases} f^1(x,y,z) = g(y,z) - yz \operatorname{sen}(xz) \\ f^2(x,y,z) = xz \cos(yz) + \cos(xz) \\ f^3(x,y,z) = xy \cos(yz) - xy \operatorname{sen}(xz) \end{cases}$$

conservativo. Per tale funzione g calcolate l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma f \cdot dl$$

del campo f lungo la curva parametrica $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ definita da

$$\gamma(t) = \operatorname{sen}(\pi t/2) e_1 + \cos(\pi t/2) e_2 + (t^2 - t + 1) e_3, \qquad t \in [0,1].$$

Soluzione. Essendo la funzione g di classe C^1 in $\mathbb{R}^2$, il campo vettoriale f risulta a sua volta essere di classe C^1 in $\mathbb{R}^3$ cosicché, essendo $\mathbb{R}^3$ un aperto convesso, esso è conservativo se e solo se è irrotazionale ovvero se e solo se risulta

$$f^1_y(x,y,z) = f^2_x(x,y,z); \qquad f^1_z(x,y,z) = f^3_x(x,y,z); \qquad f^2_z(x,y,z) = f^3_y(x,y,z);$$

per ogni (x,y,z). Le derivate in croce di f sono date da

$$\begin{aligned} &f^1_y(x,y,z) = g_y(y,z) - z \operatorname{sen}(xz); && f^1_z(x,y,z) = g_z(y,z) - y \operatorname{sen}(xz) - xyz \cos(xz); \\ &f^2_x(x,y,z) = z \cos(yz) - z \operatorname{sen}(xz); && f^2_z(x,y,z) = x \cos(yz) - xyz \operatorname{sen}(yz) - x \operatorname{sen}(xz); \\ &f^3_x(x,y,z) = y \cos(yz) - y \operatorname{sen}(xz) - xyz \cos(xz); && f^3_y(x,y,z) = x \cos(yz) - xyz \operatorname{sen}(yz) - x \operatorname{sen}(xz); \end{aligned}$$

per ogni (x,y,z) e quindi il campo f risulta irrotazionale in $\mathbb{R}^3$ se e solo si ha

$$\begin{aligned} &g_y(y,z) - z \operatorname{sen}(xz) = z \cos(yz) - z \operatorname{sen}(xz); \\ &g_z(y,z) - y \operatorname{sen}(xz) - xyz \cos(xz) = y \cos(yz) - y \operatorname{sen}(xz) - xyz \cos(xz); \\ &x \cos(yz) - xyz \operatorname{sen}(yz) - x \operatorname{sen}(xz) = x \cos(yz) - xyz \operatorname{sen}(yz) - x \operatorname{sen}(xz) \end{aligned}$$

da cui segue evidentemente

$$g_y(y,z) = z \cos(yz) \qquad \text{e} \qquad g_z(y,z) = y \cos(yz)$$

per ogni $(y,z) \in \mathbb{R}^2$. Tenuto conto della condizione $g(0,0) = 2$, si conclude che f è conservativo se e solo se g è la funzione definita da

$$g(y,z) = \operatorname{sen}(yz) + 2, \qquad (y,z) \in \mathbb{R}^2.$$

Per tale funzione g il potenziale di f che si annulla nell'origine è dato da

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= \int_0^x f^1(t,0,0)\,dt + \int_0^y f^2(x,t,0)\,dt + \int_0^z f^3(x,y,t)\,dt = \\ &= \int_0^x 2\,dt + \int_0^y 1\,dt + \int_0^z \left(2xy^2t + 2x^2yt\right)\,dt = \\ &= 2x + x \operatorname{sen}(yz) + y \cos(xz) \end{aligned}$$

per ogni (x,y,z). Infine, essendo il campo f conservativo ed essendo γ una curva liscia di estremi $\gamma(0) = (0,1,1)$ e $\gamma(1) = (1,0,1)$, si ha

$$\int_\gamma f \cdot dl = F(1,0,1) - F(0,1,1) = 2 - 1 = 1.$$

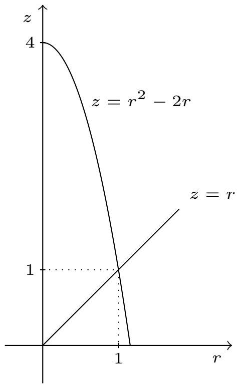
Esercizio 4. Sia

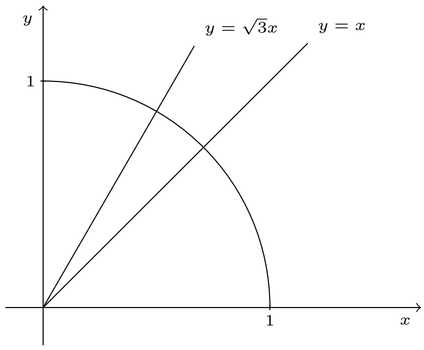
$$K = \left\{ (x\,,y\,,z):\ \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 4-3(x^2+y^2) \text{ e } y/\sqrt{3} \le x \le y \right\}.$$

(a) Descrivete e disegnate l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K x\, d(x\,,y\,,z)$.

Soluzione. L'insieme K è l'intersezione della parte del poliedro definito dai piani $y = x$ e $y = \sqrt{3}x$ contenuta nel semispazio $x \ge 0$ con il solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la figura contenuta nel primo e nel quarto quadrante del piano rz (con $r = \sqrt{x^2+y^2}$) che sta sopra la retta di equazione $z = r$ e sotto la parabola di equazione $z = 4 - r^2$ come illustrato nella figura a sinistra.





L'insieme K è compatto perché è limitato ed è intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue e quindi è (Lebesgue) misurabile. La funzione f definita da

$$f(x\,,y\,,z) = x, \qquad (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3,$$

è lineare e quindi è integrabile in K.
Calcoliamo I mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione di K sul piano xy è l'insieme

$$\pi_{xy}(K) = \left\{ (x\,,y):\ \sqrt{x^2+y^2} \le 1 \text{ e } 0 \le \frac{y}{\sqrt{3}} \le x \le y \right\}$$

rappresentato nella figura a destra e per ogni $(x\,,y) \in \pi_{xy}(K)$ la corrispondente sezione è l'intervallo

$$K_{(x,y)} = \left[\sqrt{x^2+y^2}\,, 4-3(x^2+y^2) \right], \qquad (x\,,y) \in \pi_{xy}(K).$$

Per la formula di riduzione si ha allora

$$\begin{aligned} I = \int_K x\, d(x\,,y\,,z) &= \int_{\pi_{xy}(K)} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{4-3(x^2+y^2)} x\, dz \right) d(x\,,y) = \\ &= \int_{\pi_{xy}(K)} x \left[4-3(x^2+y^2) - \sqrt{x^2+y^2} \right] d(x\,,y) = \end{aligned}$$

e quindi, utilizzando coordinate polari per calcolare l'integrale a destra, si ottiene

$$\begin{aligned} &= \left(\int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos\theta\, d\theta \right) \cdot \left(\int_0^1 \left(4 - 3r^2 - r\right) r^2\, dr \right) = \\ &= \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \cdot \left(\frac{4}{3}r^3 - \frac{1}{4}r^4 - \frac{3}{5}r^5 \right)\Bigg|_0^3 = \cdots = \left(\sqrt{3} - \sqrt{2} \right) \frac{29}{120}. \end{aligned}$$

Esercizio 5. Determinate la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) = 3tx(t) - \dfrac{3}{2}(t^3+t)[x(t)]^{5/3} \\ x(0) = 8. \end{cases}$$

Soluzione. L'equazione differenziale proposta è un'equazione di Bernoulli. La funzione a secondo membro è

$$f(t,x) = 3tx - \frac{3}{2}(t^3+t)y^{5/3}, \qquad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R},$$

ed è di classe $f \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Conseguentemente, il problema di Cauchy considerato ha soluzione massimale $x \in C^\infty(\alpha,\beta)$ con $-\infty \leq \alpha < 0 < \beta \leq +\infty$ e tale soluzione è prolungamento di ogni altra soluzione del medesimo problema di Cauchy.
Poiché la funzione identicamente nulla è soluzione del problema di Cauchy con dato iniziale $x(0)=0$, la soluzione $x(t)$ del problema considerato verifica la condizione $x(t)>0$ per ogni $t\in(\alpha,\beta)$ per il teorema di unicità.
La funzione

$$y(t) = [x(t)]^\lambda, \qquad t \in (\alpha,\beta),$$

con $\lambda \neq 0$ da determinare è di classe $C^\infty(\alpha,\beta)$ e, essendo $x(t)$ soluzione del problema di Cauchy considerato con $x(t)>0$ per ogni $t\in(\alpha,\beta)$, risulta

$$\begin{aligned} y'(t) = \lambda[x(t)]^{\lambda-1}x'(t) = \lambda[x(t)]^{\lambda-1}\left[3tx(t) + \frac{3}{2}(t^3+t)[x(t)]^{5/3}\right] = \\ = 3\lambda t y(t) - \frac{3}{2}\lambda(t^3+t)[x(t)]^{\lambda+2/3} \end{aligned}$$

con $y(t)>0$ per ogni $t\in(\alpha,\beta)$. Scegliendo $\lambda=-2/3$, la funzione $y(t)$ per $t\in(\alpha,\beta)$ risulta essere soluzione positiva del problema di Cauchy

$$\begin{cases} z'(t) = -2tz(t) + (t^3+t) \\ z(0) = 1/4. \end{cases}$$

La soluzione di tale problema è

$$z(t) = \mathrm{e}^{-t^2}\left\{\frac{1}{4} + \int_0^t (t^3+t)\mathrm{e}^{t^2}\,ds\right\} = \mathrm{e}^{-t^2}\left(\frac{1}{4}+\frac{1}{2}t^2\mathrm{e}^{t^2}\right) = \frac{1}{4}\left(\mathrm{e}^{-t^2}+2t^2\right), \qquad t\in\mathbb{R},$$

e quindi $y(t)$ coincide con $z(t)$ sull'intervallo aperto (α,β) contenente l'origine in cui risulta $z(t)>0$. Si ha evidentemente $z(t)>0$ per ogni t e quindi la soluzione massimale del problema di Cauchy proposto è

$$x(t) = \frac{8}{\left(\mathrm{e}^{-t^2}+2t^2\right)^{3/2}}, \qquad t\in\mathbb{R}.$$