Cognome	________________	Non scrivere qui	
Nome	________________	1 2 3 4 5	
Matricola			
Laurea	Civ Amb Gest Inf Eln Tlc Mec		

Università degli Studi di Parma
Dipartimento di Ingegneria e Architettura
Esame di Analisi Matematica 2 — Soluzioni
A.A. 2022-2023 — Parma, 24 Gennaio 2023

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Calcolate l'integrale curvilineo

$$I = \int_\gamma x\cos y \, dl(x\,,y)$$

ove $\gamma\colon [0\,,\pi/2] \to \mathbb{R}^2$ è la curva parametrica definita da

$$\gamma(t) = (\operatorname{sen} t)e_1 + te_2, \qquad t \in [0\,,\pi/2].$$

Soluzione. Poiché la curva parametrica γ è liscia e la funzione $f(x\,,y) = x\cos y$, $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$ è continua, risulta

$$\begin{aligned} I = \int_\gamma f\,dl &= \int_0^{\pi/2} f(\operatorname{sen} t, t)\|\gamma'(t)\|\,dt = \\ &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} t\cos t\sqrt{1+\cos^2 t}\,dt = \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{1+u}\,du = \frac{1}{3}\,(1+u)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{3}\left(\sqrt{8}-1\right). \end{aligned}$$

Esercizio 2. Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ il campo vettoriale conservativo di componenti $f = (f^1, f^2)$ definite da

$$f^1(x\,,y) = 2xye^{x^2y} - y^2\operatorname{sen}(xy^2); \qquad f^2(x\,,y) = x^2e^{x^2y} - 2xy\operatorname{sen}(xy^2) + \cos y;$$

per ogni $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$. Calcolate il potenziale $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ di f che si annulla nell'origine $(0\,,0)$.

Soluzione. Essendo il campo vettoriale $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ conservativo, il suo potenziale $F \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ che si annulla nell'origine è dato da

$$\begin{aligned} F(x\,,y) &= \int_0^x f^1(t\,,0)\,dt + \int_0^y f^2(x\,,t)\,dt = \int_0^y \left(x^2e^{x^2t} - 2xt\operatorname{sen}(xt^2) + \cos t\right)\,dt = \\ &= e^{x^2t} + \cos(xt^2) + \operatorname{sen} t\Big|_0^y = e^{x^2y} + \cos(xy^2) + \operatorname{sen} y - 2, \end{aligned}$$

per ogni $(x\,,y)$.

Esercizio 3. Sia
$$f(x,y,z) = 4xyz + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{z}, \qquad (x,y,z) \in U.$$

(a) Determinate il dominio naturale U e gli eventuali punti critici di f e stabilite la natura di tali punti critici.

(b) Determinate il minimo e il massimo globale di f sull'insieme
$$K = \left\{(x,y,z) :\ 1 \le xy \le 2,\ x/2 \le y \le 2x \text{ e } z = 2\right\}.$$

Soluzione. (a) Il dominio naturale U di f è l'insieme aperto $U = \{(x,y,z) :\ x \neq 0,\ y \neq 0 \text{ e } z \neq 0\}$ cioè tutto lo spazio euclideo $\mathbb{R}^3$ privato dei tre piani coordinati $x = 0$, $y = 0$ e $z = 0$.
La funzione f è razionale e quindi è di classe C^∞ nell'insieme aperto U in cui è definita. Le derivate parziali di f sono date da
$$f_x(x,y,z) = 4yz - 1/2x^2; \qquad f_y(x,y,z) = 4xz - 1/2y^2; \qquad f_z(x,y,z) = 4xy - 1/z^2;$$
per ogni $(x,y,z) \in U$ e quindi i punti critici sono i punti $x,y,z \neq 0$ che sono soluzioni del sistema formato dalle equazioni
$$\begin{cases} 4yz - 1/2x^2 = 0 \\ 4xz - 1/2y^2 = 0 \\ 4xy - 1/z^2 = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 4xyz - 1/2x = 0 \\ 4xyz - 1/2y = 0 \\ 4xyz - 1/z = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} 2x = 2y = z \\ 8x^2yz = 1 \end{cases}$$
cui corrispondono i punti di coordinate $P_\pm = (1/2, 1/2, 1)$ che sono dunque i soli punti critici di f.
Per determinare la natura dei punti critici, consideriamo la matrice hessiana di f che è
$$D^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 1/x^3 & 4z & 4y \\ 4z & 1/y^3 & 4x \\ 4y & 4x & 2/z^3 \end{pmatrix}, \qquad (x,y,z) \in U.$$
Utilizzando il criterio di Sylvester, si verifica facilmente che i punti critici P_+ e P_- sono rispettivamente punto di minimo e di massimo locale stretto di f. Poiché risulta $f(t,t,t) \to \pm\infty$ per $t \to \pm\infty$, gli estremi locali $P_\pm$ non sono estremi globali di f in U.
(b) Dato che l'insieme compatto K è contenuto nel piano $z = 2$, posto
$$g(x,y) = f(x,y,2) = 8xy + \frac{1}{2x} + \frac{1}{2y} + \frac{1}{2}, \qquad x \neq 0 \text{ e } y \neq 0,$$
il problema posto è equivalente a quello di trovare il massimo ed il minimo globale della funzione g sull'insieme
$$H = \left\{(x,y) :\ 1 \le xy \le 2 \text{ e } x/2 \le y \le 2x\right\}$$
che è l'insieme compatto formato dai punti del primo quadrante compresi tra le iperboli di equazioni $y = 1/x$ e $y = 2/x$ e tra le rette di equazioni $y = x/2$ e $y = 2x$. La funzione g è razionale e quindi è continua nell'insieme aperto dove è definita (il piano privato degli assi cartesiani) cosicché, essendo H compatto, per il teorema di Weierstrass esistono il minimo e il massimo globale di g su H e quindi di f su K.
Ragionando come nella prima parte, si verifica che gli unici punti critici di g sono i punti di coordinate $Q_\pm = (1/(2\sqrt[3]{2}), 1/(2\sqrt[3]{2}))$ che non appartengono a H e quindi gli estremi globali di g su H devono essere assunti sul bordo di H che è l'unione dei sostegni delle curve parametriche semplici e lisce
$$\gamma_1(t) = te_1 + (1/t)e_2, \quad 1/\sqrt{2} \le t \le \sqrt{2}; \qquad \gamma_2(t) = te_1 + (t/2)e_2, \quad \sqrt{2} \le t \le 2;$$
$$\gamma_3(t) = (2/t)e_1 + te_2, \quad 1 \le t \le 2; \qquad \gamma_4(t) = (t/2)e_1 + te_2, \quad \sqrt{2} \le t \le 2.$$
Esaminando l'andamento delle funzioni composte $g_i = g \circ \gamma_i$ $(i = 1, \ldots, 4)$ si conclude che il minimo globale di g su H è assunto nel punto di coordinate $(1,1)$ e il massimo globale di g su H è assunto nei punti di coordinate $(1,2)$ e $(2,1)$. In tali punti risulta
$$f(1,1,2) = g(1,1) = 19/2 \quad \text{e} \quad f(1,2,2) = f(2,1,2) = g(1,2) = g(2,1) = 69/4.$$

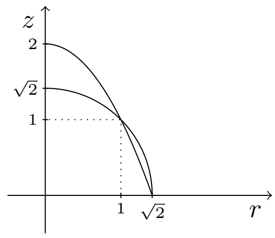
Esercizio 4. Sia

$$K = \left\{(x,y,z):\ \sqrt{2-(x^2+y^2)} \le z \le 2-(x^2+y^2) \text{ e } 0 \le x \le y\right\}.$$

(a) Descrivete l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K y^2\, d(x,y,z)$.

Soluzione. L'insieme K è l'intersezione della parte del poliedro definito dai piani $x=0$ e $y=x$ contenuta nel semispazio $x \ge 0$ con il solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la figura contenuta nel primo quadrante del piano rz (con $r=\sqrt{x^2+y^2}$) che sta al di sotto della parabola $z=2-r^2$ per $r \ge 0$ e esterna al quarto di cerchio con centro nell'origine e raggio $\sqrt{2}$ come illustrato nella figura seguente.



L'insieme K è compatto perché è limitato ed è intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue e quindi è (Lebesgue) misurabile. La funzione f definita da

$$f(x,y,z) = y^2, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

è un polinomio e quindi è integrabile in K.
Calcoliamo I mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione di K sul piano xy è

$$\pi_{xy}(K) = \left\{(x,y):\ x^2+y^2 \le 1 \text{ e } 0 \le x \le y\right\}$$

e per ogni $(x,y) \in \pi_{xy}(K)$ la corrispondente sezione è l'intervallo

$$K_{(x,y)} = [\sqrt{2-(x^2+y^2)},\, 2-(x^2+y^2)].$$

Per la formula di riduzione si ha allora

$$\begin{aligned} I = \int_K y^2\, d(x,y,z) &= \int_{\pi_{xy}(K)} \left(\int_{\sqrt{2-(x^2+y^2)}}^{2-(x^2+y^2)} y^2\, dz \right) d(x,y) = \\ &= \int_{\pi_{xy}(K)} y^2 \left[2-(x^2+y^2) - \sqrt{2-(x^2+y^2)}\right] d(x,y) \end{aligned}$$

e, utilizzando coordinate polari nel piano abbinate nuovamente alla formula di riduzione, risulta

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi_{xy}(K)} y^2 \left[2-(x^2+y^2) - \sqrt{2-(x^2+y^2)}\right] d(x,y) = \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta \cdot \int_0^1 r^2 \left(2-r^2-\sqrt{2-r^2}\right) r\, dr. \end{aligned}$$

Si ha

$$\int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{sen}^2\theta\, d\theta = \left.\frac{\theta - \cos\theta \operatorname{sen}\theta}{2}\right|_{\pi/4}^{\pi/2} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right) = \frac{\pi+2}{8};$$

$$\int_0^1 r^2\left(2-r^2-\sqrt{2-r^2}\right) r\, dr = \frac{1}{2}\left[r^4 - \frac{r^6}{3} - \frac{2}{3}r^2\left(2-r^2\right)^{3/2} - \frac{4}{15}\left(2-r^2\right)^{5/2}\right]\Bigg|_0^1 = \cdots = \frac{4}{15}\left(3-2\sqrt{2}\right)$$

da cui segue infine

$$I = \frac{(\pi+2)}{30}\left(3-2\sqrt{2}\right).$$

Esercizio 5. Data l'equazione differenziale

$$x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = \mathrm{e}^{2t} \operatorname{sen}^2 t,$$

determinate

(a) tutte le soluzioni $x(t)$ dell'equazione differenziale;

(b) la soluzione $x(t)$ tale che $x(0) = x'(0) = 0$.

Soluzione. (a) L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = 0$ la cui unica soluzione è $\lambda = 2$. Quindi, le funzioni

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{2t}; \qquad x_2(t) = t\mathrm{e}^{2t};$$

con $t \in \mathbb{R}$ sono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e si può cercare una soluzione dell'equazione completa della forma

$$x_p(t) = c_1(t)\mathrm{e}^{2t} \cos t + c_2(t)t\mathrm{e}^{2t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con c_1 e c_2 funzioni di classe C^1 in $\mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} c_1'(t)x_1(t) + c_2'(t)x_2(t) = 0 \\ c_1'(t)x_1'(t) + c_2'(t)x_2'(t) = \mathrm{e}^{2t} \operatorname{sen}^2 t. \end{cases}$$

Deve quindi essere

$$\begin{cases} c_1'(t)\mathrm{e}^{2t} + c_2'(t)t\mathrm{e}^{2t} = 0 \\ 2c_1'(t)\mathrm{e}^{2t} + c_2'(t)(1+2t)\mathrm{e}^{2t} = \mathrm{e}^{2t} \operatorname{sen}^2 t \end{cases} \implies \begin{cases} c_1'(t) = -tc_2'(t) \\ c_2'(t) = \operatorname{sen}^2 t \end{cases} \implies \begin{cases} c_1'(t) = -t \operatorname{sen}^2 t \\ c_2'(t) = \operatorname{sen}^2 t \end{cases}$$

e integrando prima per c_2 si trova

$$c_2(t) = \int \operatorname{sen}^2 t \, dt = \frac{1}{2}(t - \cos t \operatorname{sen} t) + C \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C \in \mathbb{R}$ costante arbitraria e poi per c_1 si trova

$$\begin{aligned} c_1(t) = -\int t \operatorname{sen}^2 t \, dt &= -\frac{1}{2}(t - \cos t \operatorname{sen} t)t + \frac{1}{2}\int (t - \cos t \operatorname{sen} t) \, dt = \\ &= -\frac{1}{2}(t - \cos t \operatorname{sen} t)t + \frac{t^2}{4} - \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 t + C \qquad t \in \mathbb{R}, \end{aligned}$$

con $C \in \mathbb{R}$ costante arbitraria. Una soluzione dell'equazione completa è quindi data da

$$x_p(t) = \frac{1}{4}\left(t^2 - \operatorname{sen}^2 t\right)\mathrm{e}^{2t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

e tutte le soluzioni dell'equazione sono le funzioni

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{2t} + C_2t\mathrm{e}^{2t} + \frac{1}{4}\left(t^2 - \operatorname{sen}^2 t\right)\mathrm{e}^{2t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
(b) Tenendo conto di (a), scegliamo le costanti $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ in modo che risulti $x(0) = x'(0) = 0$. Si ha

$$\begin{cases} x(0) = C_1 \\ x'(0) = 2C_1 + C_2 \end{cases}$$

da cui segue $C_1 = C_2 = 0$. La soluzione cercata è dunque la funzione

$$x(t) = \frac{1}{4}\left(t^2 - \operatorname{sen}^2 t\right)\mathrm{e}^{2t}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$