COGNOME	____________________	NON SCRIVERE QUI
NOME	____________________	1 2 3 4 5
MATRICOLA	|_|_|_|_|_|_|	
LAUREA	CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC	

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI

A.A. 2022-2023 — PARMA, 10 GENNAIO 2023

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Determinate tutti i punti della circonferenza di equazione $x^2 + y^2 = 1$ in cui il gradiente della funzione $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definita da

$$f(x, y) = x^3 + xy^2 + y, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2,$$

è ortogonale al vettore $v = (0, 1)$.

Soluzione. La funzione f è un polinomio e il suo gradiente è

$$\nabla f(x, y) = \begin{pmatrix} 3x^2 + y^2 \\ 2xy + 1 \end{pmatrix}, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Il gradiente di f è ortogonale al vettore v se il prodotto scalare tra di essi è nullo. Deve allora essere

$$\begin{cases} \langle \nabla f(x, y) \,|\, v \rangle = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} 2xy + 1 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} (x + y)^2 = 0 \\ x^2 + y^2 = 1 \end{cases}$$

e le soluzioni di questo sistema sono $x = \pm 1/\sqrt{2}$ e $y = \mp 1/\sqrt{2}$ cui corrispondono i punti di coordinate $P_\pm = (\pm 1/\sqrt{2}, \mp 1/\sqrt{2})$.

Esercizio 2. Determinate tutte le soluzioni $x(t)$ dell'equazione differenziale

$$x''(t) + 4x'(t) + 5x(t) = 5$$

tali che $x(0) = 0$ e $x(t) \to 1$ per $t \to +\infty$.

Soluzione. L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 4\lambda + 5 = 0$ le cui soluzioni complesse e coniugate sono date da $\lambda_\pm = -2 \pm i$. Quindi, le funzioni

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{-2t} \cos t; \qquad\qquad x_2(t) = \mathrm{e}^{-2t} \operatorname{sen} t;$$

con $t \in \mathbb{R}$ sono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e chairamente la funzione $x_p(t) = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$ è una soluzione dell'equazione completa. Pertanto, tutte le soluzioni dell'equazione proposta sono le funzioni

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{-2t} \cos t + C_2 \mathrm{e}^{-2t} \operatorname{sen} t + 1, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie. Si ha inoltre $x(0) = C_1 + 1$ e

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = 1$$

indipendentemente dalla scelta delle costanti C_1 e C_2. Deve quindi essere $C_1 = -1$ e conseguentemente tutte le soluzioni cercate sono le funzioni

$$x(t) = (C \operatorname{sen} t - \cos t)\, \mathrm{e}^{-2t} + 1, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C \in \mathbb{R}$ costante arbitraria.

Esercizio 3. Sia Γ la curva ottenuta come intersezione tra il cilindro ellittico di equazione $2x^2+3y^2=5$ e il piano di equazione $x+y+z=0$.

(a) Verificate che Γ è una curva ($1-$superficie) regolare e compatta in $\mathbb{R}^3$.

(b) Calcolate il massimo ed il minimo globale su Γ della funzione

$$f(x,y,z) = 4x^2+3y^2-3z^2, \qquad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

Soluzione. (a) Sia $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$ la funzione di componenti $\Phi = \left(\Phi^1,\Phi^2\right)$ definite da

$$\Phi^1(x,y,z) = 2x^2+3y^2-5 \qquad \text{e} \qquad \Phi^2(x,y,z) = x+y+z$$

per ogni $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ cosicché risulta $\Gamma = \Phi^{-1}(0,0)$. Si ha

$$D\Phi(x,y,z) = \begin{pmatrix} 4x & 6y & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,$$

e risulta $\operatorname{rk} D\Phi(x,y,z) \le 1$ se e solo se tutti i minori di ordine due della matrice $D\Phi(x,y,z)$ sono nulli. Ciò accade solo nei punti di coordinate (x,y,z) e nessun punto siffatto appartiene a Γ. Quindi Γ è una $1-$superficie regolare di $\mathbb{R}^3$. Inoltre, l'insieme Γ è evidentemente chiuso perché controimmagine di un punto mediante una funzione continua ed è anche limitato:

$$(x,y,z)\in\Gamma \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} 2x^2+3^2=5 \\ x+y+z=0 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} |x| \le 1/\sqrt{5/2} \\ |y| \le 1/\sqrt{5/3} \\ |z| \le 1/\sqrt{5/2}+1/\sqrt{5/3}. \end{cases}$$

(b) Essendo un polinomio, la funzione f è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^2$ e quindi ha minimo e massimo globale su Γ per il teorema di Weierstrass. Essendo Γ una curva regolare, gli estremi globali possono essere cercati con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Le corrispondenti equazioni sono

$$8x-4\lambda x-\mu=0; \qquad 6y-6\lambda y-\mu=0; \qquad -6z-\mu=0;$$

cui vanno aggiunte le equazioni $2x^2+3y^2=5$ e $x+y+z=0$ che definiscono Γ. Da $\mu=-6z$ e $z=-(x+y)$ segue $\mu=6(x+y)$ che, sostituito nelle prime due equazioni conduce al sistema

$$\begin{cases} (1-2\lambda)x-3y=0 \\ x+\lambda y=0. \end{cases}$$

Poiché nessun punto con coordinate $x=y=0$ appartiene a Γ, è necessario che tale sistema abbia soluzioni diverse da $x=y=0$ e ciò accade soltanto se risulta

$$\det\begin{pmatrix} 1-2\lambda & -3 \\ 1 & \lambda \end{pmatrix} = \lambda(1-2\lambda)+3 = -2\lambda^2+\lambda+3=0$$

da cui segue $\lambda=-1$ o $\lambda=3/2$.
Per $\lambda=-1$, si ricava $y=x$ che, sostituito nella rimanente equazione $2x^2+3y^2=5$, dà $x=y=\pm1$ cosicché, ricordando che è $z=-(x+y)$, si trovano i due punti di coordinate

$$P_\pm = (\pm1,\pm1,\mp2).$$

Per $\lambda=-3/2$, dalla prima equazione si ricava $y=-2x/3$ che, sostituito nella rimanente equazione $2x^2+3y^2=5$, dà $x=\pm\sqrt{3/2}$ e $y=\mp2\sqrt{2/3}$ cui corrispondono i due punti di coordinate

$$Q_\pm = (\pm\sqrt{3/2},\mp\sqrt{2/3},\pm\sqrt{1/6}).$$

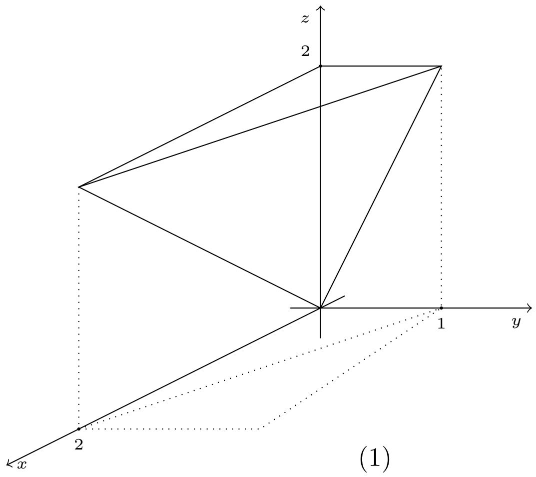
Risulta $f(P_\pm)=-5$ e $f(Q_\pm)=15/2$ da cui segue che i punti $P_\pm$ sono punti di minimo globale di f su Γ mentre i punti $Q_\pm$ sono punti di massimo globale di f su Γ.

Esercizio 4. Sia
$$K = \left\{(x\,, y\,, z) :\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1 \text{ e } x + 2y \le z \le 2\right\}.$$

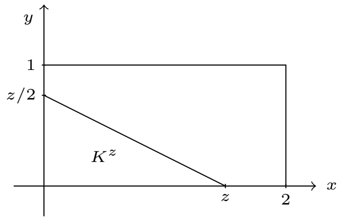
(a) Descrivete e disegnate l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K 2xy\, d(x\,, y\,, z)$.

Soluzione. (a) L'insieme K è il poliedro ottenuto prendendo la parte del parallelepipedo $[0\,,2] \times [0\,,1] \times [0\,,2]$ che sta al di sopra del piano di equazione $x + 2y - z = 0$. Esso è rappresentato in Figura (1).



(1)



(2)

(b) L'insieme K è evidentemente compatto e quindi (Lebesgue) misurabile. Inoltre, la funzione
$$f(x\,, y\,, z) = 2xy, \qquad (x\,, y\,, z) \in \mathbb{R}^3,$$
è un polinomio e quindi è integrabile su ogni insieme compatto.
Calcoliamo l'integrale di f su K mediante la formula di riduzione per strati. La proiezione di K sull'asse z è l'intervallo $\pi_z(K) = [0\,,2]$ e le corrispondenti sezioni sono gli insiemi
$$K^z = \left\{(x\,, y) :\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1 \text{ e } x + 2y \le z\right\}, \qquad z \in [0\,,2],$$
rappresentati in Figura (2). Per la formula di riduzione si ha allora
$$I = \int_0^2 \left(\int_{K^z} 2xy\, d(x\,, y) \right) dz$$
e per la stessa formula risulta poi
$$\int_{K^z} 2xy\, d(x\,, y) = \int_0^z \left(\int_0^{(z-x)/2} 2xy\, dy \right) dx = \ = \frac{1}{4} \int_0^2 x(z-x)^2\, dx = \cdots = \frac{z^4}{48}$$
per ogni $z \in [0\,,2]$ da cui segue infine
$$I = \int_0^2 \frac{z^4}{48}\, dz = \frac{1}{240} z^5 \Big|_0^2 = \cdots = \frac{2}{15}.$$
Alternativamente, si può procedere integrando per fili. In tal caso, la proiezione sul piano xy è l'insieme
$$\pi_{xy}(K) = \left\{(x\,, y) :\ 0 \le x \le 2,\ 0 \le y \le 1 \text{ e } x + 2y \le 2\right\}$$
e la corrispondente sezione è l'intervallo $[x + 2y\,, 2]$ per ogni $(x\,, y) \in \pi_{xy}(K)$. Per la formula di riduzione si ha allora
$$I = \int_{\pi_{xy}(K)} \left(\int_{x+2y}^2 2xy\, dz \right) d(x\,, y) = \int_0^2 \left(\int_0^{1-x/2} 2xy \left[2 - (x + 2y)\right]\, dy \right) dx = \cdots = \frac{2}{15}.$$

Esercizio 5. Determinate la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = 2t \tan\big(x(t)\big) \\ x(0) = \pi/6 \end{cases}$$

Soluzione. L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili. La funzione a secondo membro è $f(t,x) = g(t)h(x)$ con

$$g(t) = 2t, \qquad t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad h(x) = \tan x, \qquad x \neq (2k+1)\pi/2 \quad (k \in \mathbb{Z})$$

e, tenuto conto della condizione iniziale $x(0) = \pi/6$, non è restrittivo considerare h definita nell'intervallo $(-\pi/2, \pi/2)$. In tale intervallo la funzione h è infinite volte derivabile e quindi il problema di Cauchy considerato ha soluzione massimale $x \in C^\infty(\alpha, \beta)$ con $-\infty \leq \alpha < 0 < \beta \leq +\infty$. Tale soluzione è prolungamento di ogni altra soluzione del medesimo problema di Cauchy.
Essendo $h(0) = 0$ e $h(x) > 0$ per $0 < x < \pi/2$, la soluzione massimale verifica $0 < x(t) < \pi/2$ per ogni $\alpha < t < \beta$. Ponendo

$$H(y) = \int_{\pi/6}^{y} \frac{1}{\tan z}\, dz = \int_{\pi/6}^{y} \frac{\cos z}{\operatorname{sen} z}\, dz = \log(\operatorname{sen} z)\Big|_{\pi/6}^{y} = \log(\operatorname{sen} y) - \log\left(\frac{1}{2}\right),$$

per ogni $0 < y < \pi/2$, si deduce che la funzione composta $H \circ x$ è in $C^\infty(\alpha, \beta)$ e verifica $(H \circ x)'(t) = 2t$ per $\alpha < t < \beta$ e $H \circ x(0) = 0$. Dunque, per il teorema fondamentale del calcolo, deve essere $(H \circ x)(t) = t^2$ per $\alpha < t < \beta$ da cui segue con semplici calcoli

$$x(t) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{t^2}\right), \qquad \alpha < t < \beta.$$

Poiché si ha

$$\lim_{y \to 0^+} H(y) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{y \to (\pi/6)^-} H(y) = -\log(1/2) = \log 2 > 0,$$

si conclude che risulta

$$\alpha = -\sqrt{\log 2} \qquad \text{e} \qquad \beta = \sqrt{\log 2}.$$

La soluzione massimale è dunque

$$x(t) = \operatorname{arcsen}\left(\frac{1}{2}\mathrm{e}^{t^2}\right), \qquad |t| < \sqrt{\log 2}.$$