Cognome	______________________	Non scrivere qui	
Nome	______________________	1 2 3 4 5	
Matricola	|_|_|_|_|_|_|		
Laurea	Civ Amb Gest Inf Eln Tlc Mec		

Università degli Studi di Parma

Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Esame di Analisi Matematica 2 — Soluzioni

A.A. 2022-2023 — Parma, 25 Marzo 2024

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Scrivete l'equazione del piano tangente al grafico della funzione

$$f(x,y) = 3x + e^{x^2-\sqrt{y}}, \qquad (x,y) \in U = \{(x,y):\ y>0\},$$

nel punto $P = (-1,1)$.

Soluzione. La funzione f è di classe C^∞ in U e l'equazione del piano tangente al grafico di f in P è

$$z = f(-1,1) + f_x(-1,1)(x+1) + f_y(-1,1)(y-1).$$

Si ha $f(-1,1) = -3+1 = -2$ e le derivate parziali di f sono

$$f_x(x,y) = 3 + 2xe^{x^2-\sqrt{y}} \qquad \text{e} \qquad f_y(x,y) = -\frac{1}{2\sqrt{y}}e^{x^2-\sqrt{y}}$$

per ogni $(x,y) \in U$ da cui segue $f_x(-1,1) = 1$ e $f_y(-1,1) = -1/2$. Sostituendo nell'equazione del piano tangente risulta

$$z = -2 + (x+1) - (y-1)/2 \qquad \Longleftrightarrow \qquad 2x - y - 2z = 1.$$

Esercizio 2. Determinate $a \in \mathbb{R}$ in modo che il campo vettoriale $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ di componenti $f = (f^1, f^2, f^3)$ definite da

$$f^1(x,y,z) = ay\cos(yz); \qquad f^2(x,y,z) = xyz\,\mathrm{sen}\,(yz) - x\cos(yz); \qquad f^3(x,y,z) = xy^2\,\mathrm{sen}\,(yz);$$

per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ sia conservativo e per tale a calcolate il potenziale $F \in C^\infty(\mathbb{R}^3)$ di f che si annulla nel punto di coordinate $(1,1,0)$.

Soluzione. Poiché $\mathbb{R}^3$ è convesso e il campo vettoriale f è di classe C^∞, esso è conservativo in $\mathbb{R}^3$ se e solo se è irrotazionale ovvero risulta $f^1_y = f^2_x$, $f^1_z = f^3_x$ e $f^2_z = f^3_y$ in $\mathbb{R}^3$. Si ha

$$\begin{aligned}
f^1_y(x,y) &= a[(\cos(yz) - yz\,\mathrm{sen}\,(yz)]; & f^2_x(x,y) &= yz\,\mathrm{sen}\,(yz) - \cos(yz);\\
f^1_z(x,y) &= -ay^2\,\mathrm{sen}\,(yz); & f^3_x(x,y) &= y^2\,\mathrm{sen}\,(yz);\\
f^2_z(x,y) &= 2xy\,\mathrm{sen}\,(yz) + xy^2z\cos(yz); & f^3_y(x,y) &= 2xy\,\mathrm{sen}\,(yz) + xy^2z\cos(yz);
\end{aligned}$$

per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ e deve quindi aversi

$$a[(\cos(yz) - yz\,\mathrm{sen}\,(yz)] = yz\,\mathrm{sen}\,(yz) - \cos(yz) \quad \text{e} \quad -ay^2\,\mathrm{sen}\,(yz) = y^2\,\mathrm{sen}\,(yz)$$

per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ da cui segue necessariamente $a = -1$, ponendo ad esempio $y = 1$ e $z = \pi/2$ nella seconda equazione.
Per $a = -1$ i potenziali di f sono le funzioni $F(x,y,z) = -xy\cos(yz) + C$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$, con $C \in \mathbb{R}$ costante arbitraria e, imponendo che sia $F(1,1,0) = 0$ si trova $C = 1$. Il potenziale cercato è quindi $F(x,y,z) = 1 - xy\cos(yz)$ per $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

Esercizio 3. Sia

$$f(x,y,z) = x^4 - 8x^3 + 20x^2 + y^2 + 4z^2 - 8xz, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Determinate gli eventuali punti critici di f e stabilitene la natura.

(b) Determinate l'immagine $f(\mathbb{R}^3)$.

Soluzione. (a) La funzione f è un polinomio e quindi è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Le derivate parziali di f sono date da

$$f_x(x,y,z) = 4x^3 - 24x^2 + 40x - 8z; \qquad f_y(x,y,z) = 2y; \qquad f_z(x,y,z) = 8z - 8x;$$

per ogni (x,y,z) e quindi i punti critici sono le soluzioni del sistema formato dalle equazioni

$$\begin{cases} 4x^3 - 24x^2 + 40x - 8z = 0 \\ 2y = 0 \\ 8z - 8x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^3 - 6x^2 + 10x - 2z = 0 \\ y = 0 \\ z = x \end{cases} \iff \begin{cases} x\left(x^2 - 6x + 8\right) = 0 \\ y = 0 \\ z = x \end{cases}$$

cui corrispondono i punti di coordinate

$$P = (0,0,0); \qquad Q = (2,0,2); \qquad R = (4,0,4).$$

La funzione f ha dunque tre punti critici.
Per determinare la natura dei punti critici, calcoliamo la matrice hessiana di f che è

$$D^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 48x + 40 & 0 & -8 \\ 0 & 2 & 0 \\ -8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

per ogni (x,y,z). Posto

$$\Delta_m = \det\left(\left(D^2 f\right)_h^k\right)_{1 \le h,k \le m}, \qquad m = 1,2,3,$$

per il criterio di Sylvester si ha

$$D^2 f(P) = D^2 f(R) = \begin{pmatrix} 40 & 0 & -8 \\ 0 & 2 & 0 \\ -8 & 0 & 8 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \Delta_1 = 40 \\ \Delta_2 = 80 \\ \Delta_3 = 512 \end{cases} \implies \text{punti di minimo locale;}$$

$$D^2 f(Q) = \begin{pmatrix} -8 & 0 & -8 \\ 0 & 2 & 0 \\ -8 & 0 & 8 \end{pmatrix} \implies \begin{cases} \Delta_1 = -8 \\ \Delta_2 = -16 \\ \Delta_3 = -256 \end{cases} \implies \text{punto di sella.}$$

(b) Risulta

$$\begin{aligned} f(x,y,z) &= x^2(x^2 - 8x + 20) + y^2 + 4z^2 - 8xz = \\ &= x^2(x-4)^2 + 4x^2 + y^2 + 4z^2 - 8xz = x^2(x-4)^2 + y^2 + 4(x-z)^2 \end{aligned}$$

per ogni (x,y,z) da cui segue che i punti di minimo locale $P = (0,0,0)$ e $R = (4,0,4)$ di f sono in effetti punti di minimo globale. Si ha infine $f(P) = f(R) = 0$ e

$$f(x,0,0) = x^4 - 8x^3 + 20x^2 = x^2(x-4)^2 + 4x^2 \ge 4x^2 \to +\infty \qquad \text{per } x \to \pm\infty$$

da cui segue $f(\mathbb{R}^3) = [0,+\infty)$ per il teorema dei valori intermedi.

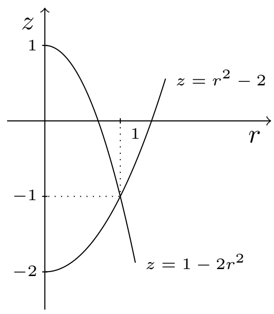
Esercizio 4. Sia

$$K = \left\{(x\,,y\,,z):\ (x^2+y^2)-2 \le z \le 1-2(x^2+y^2) \text{ e } 0 \le y \le x\right\}.$$

(a) Descrivete l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K x(x+2y)\,d(x\,,y\,,z)$.

Soluzione. L'insieme K è l'intersezione della parte del poliedro definito dai piani $y=0$ e $y=x$ contenuta nell'intersezione dei semispazi $x \ge 0$ e $y \ge 0$ con il solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la figura contenuta nel primo quadrante del piano rz (con $r=\sqrt{x^2+y^2}$) compresa tra le parabole di equazione $z=r^2-2$ e $z=1-2r^2$ come illustrato nella figura seguente.



L'insieme K è compatto perché è limitato, come risulta dalla figura ($x^2+y^2 \le 1$ e $-2 \le z \le 1$), ed è intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue e quindi è (Lebesgue) misurabile. La funzione f definita da

$$f(x\,,y\,,z) = x(x=2y), \qquad (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3,$$

è un polinomio e quindi è integrabile in K.
Calcoliamo I mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione di K sul piano xy è

$$\pi_{xy}(K) = \left\{(x\,,y):\ x^2+y^2 \le 1 \text{ e } 0 \le y \le x\right\}$$

e per ogni $(x\,,y) \in \pi_{xy}(K)$ la corrispondente sezione è l'intervallo

$$K_{(x,y)} = [(x^2+y^2)-2\,,1-2(x^2+y^2)].$$

Per la formula di riduzione si ha allora

$$\begin{aligned} I = \int_K x(x+2y)\,d(x\,,y\,,z) &= \int_{\pi_{xy}(K)} \left(\int_{(x^2+y^2)-2}^{1-2(x^2+y^2)} y^2\,dz\right) d(x\,,y) = \\ &= \int_{\pi_{xy}(K)} x(x+2y)\left[1-2(x^2+y^2)-(x^2+y^2)+2\right] d(x\,,y) \end{aligned}$$

e, utilizzando coordinate polari nel piano abbinate nuovamente alla formula di riduzione, risulta

$$I = \int_{\pi_{xy}(K)} 3x(x+2y)\left[1-(x^2+y^2)\right] d(x\,,y) = 3\int_0^{\pi/4} \cos\theta(\cos\theta + 2\operatorname{sen}\theta\,d\theta \cdot \int_0^1 r^3\left(1-r^2\right) dr.$$

Si ha

$$\int_0^{\pi/4} \left(\cos^2\theta + 2\cos\theta\operatorname{sen}\theta\right) d\theta = \left(\frac{1}{2}[\theta+\cos\theta\operatorname{sen}\theta] + \operatorname{sen}^2(\theta)\right)\Big|_0^{\pi/4} = \frac{1}{2}\left(\frac{\pi}{4}+\frac{1}{2}\right)+\frac{1}{2} = \frac{\pi+6}{8};$$

$$\int_0^1 r^3\left(1-r^2\right) dr = \left(\frac{r^4}{4}-\frac{r^6}{6}\right)\Big|_0^1 = \frac{1}{4}-\frac{1}{6} = \frac{1}{12}$$

da cui segue infine

$$I = 3\frac{(\pi+6)}{8}\frac{1}{12} = \frac{\pi+6}{32}.$$

Esercizio 5. Determinate

(a) tutte le soluzioni dell'equazione differenziale:

$$z'(t) = \frac{2t}{1+t^2} z(t) + t^2;$$

(b) la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) = -\dfrac{2t}{1+t^2} x(t) + t^2 [x(t)]^2 \\ x(0) = -4/(4-\pi) \end{cases}$$

Soluzione. (a) L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del primo ordine. Posto

$$A(t) = \int \frac{2t}{1+t^2}\, dt = \log(1+t^2), \qquad t \in \mathbb{R},$$

tutte le soluzioni dell'equazione sono date dalle funzioni

$$x(t) = \mathrm{e}^{A(t)} \int t^2 \mathrm{e}^{-A(t)}\, dt = (1+t^2) \int \left(\frac{t^2}{1+t^2} \right) dt = (1+t^2)\,(t - \arctan t + C)\,, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C \in \mathbb{R}$ costante arbitraria.

(b) La funzione a secondo membro è

$$f(t,x) = -\frac{2t}{1+t^2} x + t^2 x^2, \qquad (t,x) \in \mathbb{R}^2,$$

ed è di classe $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Conseguentemente, il problema di Cauchy considerato ha soluzione massimale $x \in C^\infty(\alpha,\beta)$ con $-\infty \le \alpha < 0 < \beta \le +\infty$. Tale soluzione è prolungamento di ogni altra soluzione del medesimo problema di Cauchy.

Poiché si ha $x(0) < 0$ e la soluzione del medesimo problema di Cauchy con dato iniziale $x_0 = 0$ è la funzione identicamente nulla $x(t) = 0$ per ogni t, la soluzione massimale del problema di Cauchy considerato verifica la condizione $x(t) < 0$ per ogni $t \in (\alpha,\beta)$. La funzione

$$y(t) = [-x(t)]^\lambda, \qquad t \in (\alpha,\beta),$$

con $\lambda \neq 0$ da determinare è di classe $C^\infty(\alpha,\beta)$ e, essendo $x(t)$ soluzione del problema di Cauchy considerato con $x(t) < 0$ per ogni $t \in (\alpha,\beta)$, risulta

$$y'(t) = -\lambda[-x(t)]^{\lambda-1} x'(t) = -\lambda[-x(t)]^{\lambda-1} \left(-\frac{2t}{1+t^2} x(t) + t^2 [x(t)]^2 \right) = -\lambda \frac{2t}{1+t^2} y(t) - \lambda t^2 [y(t)]^{1+1/\lambda}$$

con $y(t) > 0$ per ogni $t \in (\alpha,\beta)$ e $y(0) = [4/(4-\pi)]^\lambda$. Scegliendo $\lambda = -1$, la funzione $y(t)$ per $t \in (\alpha,\beta)$ risulta essere soluzione positiva del problema di Cauchy

$$\begin{cases} z'(t) = \dfrac{2t}{1+t^2} z(t) + t^2 \\ z(0) = 1 - \pi/4. \end{cases}$$

Per (a), la soluzione di tale problema è

$$z(t) = (1+t^2)\,(t - \arctan t + 1 - \pi/4)\,, \qquad t \in \mathbb{R},$$

e quindi $y(t)$ coincide con $z(t)$ sull'intervallo aperto (α,β) contenente l'origine in cui risulta $z(t) > 0$. Risolvendo tale disequazione si trova $t > -1$ e quindi la soluzione massimale del problema di Cauchy proposto è

$$x(t) = \frac{1}{(1+t^2)\,(\arctan t - t + \pi/4 - 1)}, \qquad t > -1.$$