Cognome	______________________	Non scrivere qui
Nome	______________________	1 | 2 | 3 | 4 | 5
Matricola	⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌋	
Laurea	Civ Amb Gest Inf Eln Tlc Mec	

Università degli Studi di Parma

Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Esame di Analisi Matematica 2 — Soluzioni

A.A. 2022-2023 — Parma, 6 Febbraio 2024

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Determinate e disegnate l'insieme A dei punti in cui la matrice hessiana della funzione $f(x,y) = 3x^2y + 2y^3$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ è definita negativa.

Soluzione. La funzione f è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^2$ e la matrice hessiana di f è

$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 6y & 6x \\ 6x & 12y \end{pmatrix}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Denotati con $\lambda_1(x,y)$ e $\lambda_2(x,y)$ gli autovalori di $D^2 f(x,y)$, si ha che $D^2 f(x,y)$ è definita negativa se

$$\begin{cases} \lambda_1(x,y) < 0 \\ \lambda_2(x,y) < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} \det\big(D^2 f(x,y)\big) > 0 \\ \operatorname{tr}\big(D^2 f(x,y)\big) < 0 \end{cases} \iff \begin{cases} 36(2y^2 - x^2) > 0 \\ 18y < 0. \end{cases}$$

Deve quindi essere $|y| > |x|/\sqrt{2}$ e $y < 0$ da cui segue

$$A = \Big\{(x,y) : \ |y| > |x|/\sqrt{2} \text{ e } y > 0\Big\}$$

che è la porzione di piano contenuta nel semipiano $y < 0$ tra le rette di equazione $y = x/\sqrt{2}$ e $y = -x/\sqrt{2}$.

Esercizio 2. Determinate tutte le funzioni $g \in C^1(\mathbb{R})$ per le quali il campo vettoriale $f \in C^1(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ di componenti $f = (f^1, f^2)$ definite da

$$\begin{cases} f^1(x,y) = [g(x)y + 2xy]\mathrm{e}^x \\ f^2(x,y) = g(x)\mathrm{e}^x \end{cases} \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

risulti conservativo in $\mathbb{R}^2$ ed il lavoro di f dall'origine al punto di coordinate $(1,1)$ sia uguale a zero.

Soluzione. Essendo $\mathbb{R}^2$ convesso, il campo vettoriale f è conservativo in $\mathbb{R}^2$ se e solo se è irrotazionale in $\mathbb{R}^2$ ovvero se e solo se risulta $f^1_y(x,y) = f^2_x(x,y)$ per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$. Deve dunque essere

$$[g(x) + 2x]\mathrm{e}^x = f^1_y(x,y) = f^2_x(x,y) = [g'(x) + g(x)]\mathrm{e}^x \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

da cui segue che deve essere $g'(x) = 2x$ per ogni $x \in \mathbb{R}$ ovvero $g(x) = x^2 + c$, $x \in \mathbb{R}$ con $c \in \mathbb{R}$ costante arbitraria. Per tali funzioni g il campo vettoriale f è conservativo e il suo integrale curvilineo lungo la curva parametrica γ ottenuta per incollamento dei segmenti $\gamma_1(t) = te_1$ e $\gamma_2(t) = e_1 + te_2$ per $t \in [0,1]$ è

$$\int_\gamma f \cdot dl = \int_{\gamma_1} f \cdot dl + \int_{\gamma_2} f \cdot dl = \int_0^1 f^1(t,0)\,dt + \int_0^1 f^2(1,t)\,dt = \int_0^1 \mathrm{e}(1+c)\,dt = \mathrm{e}(1+c).$$

Esso si annulla solo per è $c = -1$ e quindi la funzione cercata è $g(x) = x^2 - 1$, $x \in \mathbb{R}$.

Esercizio 3. Calcolate la distanza del punto $P = (4,0,3)$ dall'ellissoide

$$\Sigma = \left\{(x,y,z) :\ x^2 + 2y^2 + z^2 = 1\right\}.$$

Soluzione. La distanza di P dal punto di coordinate (x,y,z) è la radice quadrata della funzione

$$f(x,y,z) = (x-4)^2 + y^2 + (z-3)^2, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

e quindi la distanza $d_\Sigma(P)$ di P dall'ellissoide Σ è la radice quadrata del minimo globale di f su Σ. Tale minimo esiste per il teorema di Weierstrass poiché f è un polinomio e Σ è un insieme compatto: infatti, Σ è chiuso in quanto insieme degli zeri di $\Phi(x,y,z) = x^2+2y^2+z^2-1$, $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ ed è evidentemente limitato. Inoltre, Σ è una $2-$superficie regolare in $\mathbb{R}^3$ poiché il gradiente di Φ si annulla solo nell'origine. È quindi possibile determinare il minimo globale di f su Σ con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Il sistema dei moltiplicatori di Lagrange è dato da

$$\begin{cases} 2(x-4) - 2\lambda x = 0 \\ 2y - 4\lambda y = 0 \\ 2(z-3) - 2\lambda z = 0 \end{cases} \qquad \iff \qquad \begin{cases} (1-\lambda)x = 4 \\ (1-2\lambda)y = 0 \\ (1-\lambda)z = 3 \end{cases}$$

cui va aggiunta l'equazione che esprime l'appartenenza del punto a Σ.
Dalla prima equazione segue che deve essere $\lambda \neq 1$ mentre dalla seconda risulta $\lambda = 1/2$ o $y = 0$. Se è $\lambda = 1/2$, dalla prima equazione segue $x = 8$ e dalla terza $z = 6$ ma nessun punto di coordinate $(8,y,6)$ appartiene a Σ. Deve quindi necessariamente essere $\lambda \neq 1$ e $y = 0$ cosicché dalle altre due equazioni del sistema segue

$$\begin{cases} x = \dfrac{4}{1-\lambda} \\ z = \dfrac{1}{3-\lambda} \end{cases}$$

da cui, sostituendo nell'equazione che esprime l'appartenenza a Σ, segue

$$\frac{16}{(1-\lambda)^2} + \frac{9}{(1-\lambda)^2} = 1 \qquad \Longrightarrow \qquad (1-\lambda)^2 = 25 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda \in \{-4, 6\}.$$

Si ottengono così i due punti di coordinate

$$P_+ = (4/5, 0, 3/5) \qquad \text{e} \qquad P_- = (-4/5, 0, -3/5)$$

a seconda che sia $\lambda = -4$ o $\lambda = 6$. Risulta infine

$$f(P_+) = \left(\frac{4}{5} - 4\right)^2 + \left(\frac{3}{5} - 3\right)^2 = \ldots = 16 \qquad \text{e} \qquad f(P_-) = \left(\frac{4}{5} + 4\right)^2 + \left(\frac{3}{5} + 3\right)^2 = \ldots = 36$$

da cui segue che P_+ è il punto di Σ con minima distanza da P e che la distanza $d_\Sigma(P)$ di P dall'ellissoide Σ è uguale a 4.

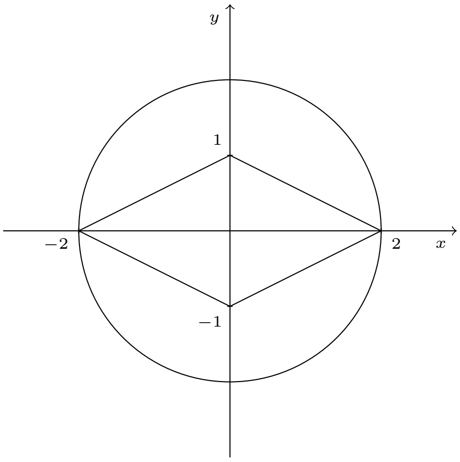
Esercizio 4. Sia

$$K = \{(x,y,z) : |x| + 2|y| \leq 2 \text{ e } 0 \leq z \leq 4 - x^2 - y^2\}.$$

(a) Descrivete l'insieme K.

(b) Calcolate la misura (volume) $|K|$ di K.

Soluzione. L'insieme K è formato dai punti di coordinate (x,y,z) compresi tra il paraboloide a sezione circolare di equazione $z = 4 - x^2 - y^2$ e il piano $z = 0$ la cui proiezione sul piano $z = 0$ è contenuta nel parallelogramma P di equazione $|x| + 2|y| = 2$. Tale parallelogramma è iscritto nel cerchio di equazione $x^2 + y^2 = 4$ che è l'intersezione tra il paraboloide e il piano $z = 0$. L'insieme K ha quindi la forma di una tenda con pianta il parallelogramma P picchettata a quota $z = 0$ nei vertici di P di coordinate $(\pm 2, 0)$ e a quota $z = \pm 3$ nei vertici di P di coordinate $(0, \pm 1)$



L'insieme K è compatto perché è limitato ($|x| \leq 2$, $|y| \leq 1$ e $0 \leq z \leq 4$) ed è intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue e quindi è (Lebesgue) misurabile.

Calcoliamo la misura $|K|$ di K mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione di K sul piano xy è formata dai punti (x,y) tali che $|x| + 2|y| \leq 2$ e $x^2 + y^2 \leq 4$. Poiché risulta

$$|x| + 2|y| \leq 2 \qquad \Longrightarrow \qquad 4 \geq (|x| + 2|y|)^2 = x^2 + 4|x||y| + 4y^2 \geq x^2 + y^2,$$

la proiezione di K sul piano xy risulta essere il parallelogramma

$$\pi_{xy}(K) = \{(x,y) : |x| + 2|y| \leq 2\}$$

rappresentato nella figura precedente e per ogni $(x,y) \in \pi_{xy}(K)$ la corrispondente sezione è l'intervallo

$$K_{(x,y)} = \left[-4 + (x^2 + y^2), 4 - (x^2 + y^2)\right].$$

Per la formula di riduzione, tenendo conto delle evidenti simmetrie, si ha allora

$$\begin{aligned}
|K| = \int_K 1\, d(x,y,z) &= \int_{\pi_{xy}(K)} 2\left[4 - x^2 - 4y^2\right] d(x,y) = \\
&= 8 \int_0^1 \left(\int_0^{2-2y} \left[4 - (x^2 - y^2)\right] dx \right) dy = \\
&= 8 \int_0^1 \left(\left(4 - y^2\right) x - \frac{x^3}{3} \right) \Bigg|_0^{2(1-y)} dy = \\
&= 8 \int_0^1 \left[(8 - 8y - 2y^2 + 2y^3 - \frac{8}{3}(1-y)^3 \right] dy = \cdots = \frac{76}{3}.
\end{aligned}$$

Esercizio 5. Dato il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = [x(t)]^4 + \dfrac{1}{[x(t)]^2} \\ x(0) = x_0 > 0 \end{cases}$$

(a) determinatene la soluzione massimale corrispondente a $x_0 = 1$;

(b) determinate per quali dati iniziali $x_0 > 0$ la soluzione massimale è definita per $t = \pi/18$.

Soluzione. L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili. La funzione a secondo membro è $f(t,x) = g(t)h(x)$ con

$$g(t) = 1, \qquad t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad h(x) = x^4 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^6+1}{x^2}, \qquad x \neq 0$$

e, tenuto conto della condizione iniziale $x(0) = x_0 > 0$, non è restrittivo considerare h definita nell'intervallo $(0, +\infty)$. In tale intervallo la funzione h è infinite volte derivabile e quindi il problema di Cauchy considerato ha soluzione massimale $x \in C^\infty(\alpha, \beta)$ con $-\infty \leq \alpha < 0 < \beta \leq +\infty$. Tale soluzione è prolungamento di ogni altra soluzione del medesimo problema di Cauchy.
Essendo $h(x)$ definita per $x > 0$, la soluzione massimale verifica $x(t) > 0$ per ogni $\alpha < t < \beta$. Ponendo

$$H(y) = \int_{x_0}^{y} \frac{z^2}{z^6+1}\,dz = \frac{1}{3}\int_{x_0}^{y^3} \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{1}{3}\arctan z\Big|_{x_0}^{y^3} = = \frac{1}{3}\arctan(y^3) - \frac{1}{3}\arctan(x_0^3)$$

per $y > 0$, si deduce che la funzione composta $H \circ x$ è in $C^\infty(\alpha, \beta)$ e verifica $(H \circ x)'(t) = 1$ per $\alpha < t < \beta$ e $H \circ x(0) = x_0$. Dunque, per il teorema fondamentale del calcolo, deve essere $(H \circ x)(t) = t$ per $\alpha < t < \beta$ da cui segue con semplici calcoli

$$x(t) = \sqrt[3]{\tan\left(3t + \arctan(x_0^3)\right)}, \qquad \alpha < t < \beta.$$

Poiché si ha

$$\lim_{y \to 0^+} H(y) = -\frac{1}{3}\arctan(x_0^3) \qquad \text{e} \qquad \lim_{y \to +\infty} H(y) = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\arctan(x_0^3),$$

si conclude che risulta

$$\alpha = -\frac{1}{3}\arctan(x_0^3) \qquad \text{e} \qquad \beta = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\arctan(x_0^3).$$

La soluzione massimale con dato iniziale $x_0 > 0$ è dunque

$$x(t) = \sqrt[3]{\tan\left(3t + \arctan(x_0^3)\right)}, \qquad -\frac{1}{3}\arctan(x_0^3) < t < \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\arctan(x_0^3).$$

(a) Ponendo $x_0 = 1$ nella formula precedente si trova soluzione massimale del problema di Cauchy considerato con tale dato iniziale che risulta essere

$$x(t) = \sqrt[3]{\tan\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)}, \qquad -\frac{\pi}{12} < t < \frac{\pi}{12}.$$

(b) Affinché la soluzione massimale del problema di Cauchy considerato sia definita per $t = \pi/18$ deve essere $x_0 > 0$ e

$$\frac{\pi}{18} < \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3}\arctan(x_0^3) \qquad \iff \qquad \arctan(x_0^3) < \frac{\pi}{3} \qquad \iff x_0 < \sqrt[6]{3}$$

da cui segue $0 < x_0 < \sqrt[6]{3}$.