COGNOME	______________________	NON SCRIVERE QUI
NOME	______________________	1 2 3 4 5
MATRICOLA	⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌋	
LAUREA	CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC	

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI

A.A. 2021-2022 — PARMA, 18 NOVEMBRE 2022

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore e mezza. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Siano $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ un campo vettoriale di componenti $f = (f^1, f^2)$ tale che

$$f(0,0) = (0,0) \qquad \text{e} \qquad Df(0,0) = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

e $g \in C^\infty(\mathbb{R}^2)$ una funzione tale che $Dg(0,0) = (1, -2)$. Calcolate il gradiente $\nabla h(0,0)$ della funzione

$$h(x,y) = g \circ f(x,y) = g\big(f^1(x,y), f^2(x,y)\big), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Soluzione. Per la regola della catena si ha

$$\nabla h(x,y) = Dg(f(x,y))Df(x,y), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

e quindi per $(x,y) = (0,0)$ risulta

$$Dh(0,0) = Dg(0,0)DF(0,0) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}$$

cosicché, calcolando il prodotto riga per colonna, si ottiene

$$\nabla h(0,0) = \begin{pmatrix} -4 \\ -9 \end{pmatrix}.$$

Esercizio 2. Calcolate l'integrale curvilineo del campo vettoriale $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ di componenti $f = (f^1, f^2, f^3)$ definite da

$$f^1(x,y,z) = -\frac{y}{x^2+y^2}; \qquad f^2(x,y,z) = \frac{x}{x^2+y^2}; \qquad f^3(x,y,z) = xyz;$$

per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ lungo la curva parametrica liscia $\gamma(t) = (\cos t)e_1 + (\operatorname{sen} t)e_2 + te_3$, $t \in [0, 2\pi]$.

Soluzione. Si ha

$$\begin{aligned} \int_\gamma f \cdot dl &= \int_0^{2\pi} \langle f(\gamma(t)) \,|\, \gamma'(t) \rangle \, dt = \\ &= \int_0^{2\pi} \left(\frac{\operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(t)}{\operatorname{sen}^2(t) + \cos^2(t)} + t\cos(t)\operatorname{sen}(t) \right) dt = \int_0^{2\pi} \left(1 + \frac{t}{2}\operatorname{sen}(2t) \right) dt \end{aligned}$$

e, tenendo conto che, integrando per parti, risulta

$$\int t\operatorname{sen}(2t)\,dt = -\frac{t}{2}\cos(2t) + \int \frac{1}{2}\cos(2t)\,dt = -\frac{t}{2}\cos(2t) + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2t) + C$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$ con $C \in \mathbb{R}$ costante arbitraria, pr il teorema fondamentale del calcolo, si ha infine

$$\int_\gamma f \cdot dl = 2\pi + \frac{1}{2}\left[-\frac{t}{2}\cos(2t) + \frac{1}{4}\operatorname{sen}(2t) \right]\Bigg|_0^{2\pi} = 2\pi + \frac{\pi}{2} = \frac{5\pi}{2}.$$

Esercizio 3. Sia Γ la curva piana di equazione $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 208$.

(a) Verificate che Γ è una curva ($1-$superficie) regolare e compatta in $\mathbb{R}^2$.

(b) Calcolate il massimo ed il minimo globale su Γ della funzione

$$f(x, y) = x + 2y, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Soluzione. (a) L'insieme Γ è una curva regolare in $\mathbb{R}^2$ poiché è l'insieme degli zeri del polinomio $q(x, y) = 5x^2 + 6xy + 5y^2 - 208$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, il cui gradiente si annulla solo nell'origine. Inoltre, Γ è un insieme compatto poiché è chiuso in quanto insieme di livello di una funzione continua ed è anche limitato poiché risulta

$$(x, y) \in \Gamma \quad \Longrightarrow \quad 208 = 5x^2 + 6xy + 5y^2 \geq 5x^2 - \frac{6}{2}\left(x^2 + y^2\right) + 5y^2 = 2\left(x^2 + y^2\right) \quad \Longrightarrow \quad \|(x, y)\| \leq \sqrt{104}.$$

L'insieme Γ è la forma quadratica di equazione $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 208$ la cui matrice simmetrica

$$S = \begin{pmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 5 \end{pmatrix}$$

ha autovalori positivi $\lambda_1 = 2$ e $\lambda_2 = 8$ e corrispondenti autovettori

$$v_1 = \begin{pmatrix} -1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad v_2 = \begin{pmatrix} 1/\sqrt{2} \\ 1/\sqrt{2} \end{pmatrix}.$$

Pertanto, Γ è l'ellisse nel piano con centro nell'origine, assi v_1 e v_2 e semiassi di lunghezza $\sqrt{104}$ e $\sqrt{26}$ Inoltre,

(b) La funzione f è lineare e quindi ha minimo e massimo globale su Γ per il teorema di Weierstrass. Essendo Γ una curva regolare, gli estremi globali possono essere cercati con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Le corrispondenti equazioni sono

$$\begin{cases} 1 - \lambda(10x + 6y) = 0 \\ 2 - \lambda(6x + 10y) = 0 \end{cases}$$

alle quali va aggiunta l'equazione $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 208$ che definisce Γ. Deve evidentemente essere $\lambda \neq 0$ e quindi, eliminando il parametro λ, risulta

$$2(10x + 6y) = \frac{2}{\lambda} = (6x + 10y) \qquad \Longrightarrow \qquad y = -7x$$

che, sostituito nella rimanente equazione $5x^2 + 6xy + 5y^2 = 208$, dà $x = \pm 1$ cui corrispondono i due punti di coordinate $P = (-1, 7)$ e $Q = (1, -7)$. Si ha infine $f(1, -7) = -13$ e $f(-1, 7) = 13$ da cui segue che P è punto di massimo globale di f su Γ mentre Q è punto di minimo globale di f su Γ.

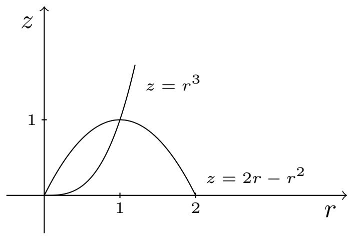
Esercizio 4. Sia

$$K = \left\{ (x, y, z) : \ 0 \le z \le \min \left\{ (x^2+y^2)^{3/2}, 2\sqrt{x^2+y^2} - (x^2+y^2) \right\} \text{ e } x \le y \le \sqrt{3}x \right\}.$$

(a) Descrivete l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K x \, d(x, y, z)$.

Soluzione. L'insieme K è l'intersezione della parte del poliedro definito dai piani $y = x$ e $y = \sqrt{3}x$ contenuta nel semispazio $x \ge 0$ con il solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la figura contenuta nel primo quadrante del piano rz (con $r = \sqrt{x^2+y^2}$) compresa tra l'asse r e il grafico di $z = \min\{r^3, 2r - r^2\}$ per $r \ge 0$ come illustrato nella figura seguente.



L'insieme K è compatto perché è limitato ed è intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue e quindi è (Lebesgue) misurabile. La funzione f definita da

$$f(x, y, z) = x, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

è lineare e quindi è integrabile in K.
Calcoliamo I mediante la formula di riduzione per strati. La proiezione di K sull'asse z è l'intervallo $\pi_z(K) = [0, 1]$ e per ogni $z \in [0, 1]$ la corrispondente sezione è la porzione di cerchio

$$K^z = \left\{ (x, y) : \ \sqrt[3]{z} \le \sqrt{x^2+y^2} \le 1 + \sqrt{1-z} \text{ e } x \le y \le \sqrt{3}x \right\}.$$

Per la formula di riduzione si ha allora

$$I = \int_K x \, d(x, y, z) = \int_{\pi_z(K)} \left(\int_{K^z} x \, dz \right) d(x, y) = \int_0^1 \left(\int_{K^z} x \, d(x, y) \right) dz$$

e per ogni $z \in [0, 1]$, utilizzando coordinate polari nel piano abbinate nuovamente alla formula di riduzione, risulta

$$\begin{aligned} \int_{K^z} x \, d(x, y) &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos\theta \, d\theta \left(\int_{\sqrt[3]{z}}^{1+\sqrt{1-z}} r^2 \, dr \right) = \\ &= \operatorname{sen}\theta \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} \cdot \frac{1}{3} r^3 \Big|_{\sqrt[3]{z}}^{1+\sqrt{1-z}} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \right) \frac{1}{3} \left[\left(1 + \sqrt{1-z}\right)^3 - z \right] \end{aligned}$$

da cui segue infine

$$\begin{aligned} I &= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{6} \int_0^1 \left[\left(1 + \sqrt{1-z}\right)^3 - z \right] dr = \\ &= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{6} \int_0^1 \left[(1-z)^{3/2} - 4z + 3\sqrt{1-z} + 4 \right] dr = \\ &= \frac{\sqrt{3}-\sqrt{2}}{6} \left[-\frac{2}{5}(1-z)^{5/2} - 2z^2 - 2(1-z)^{3/2} + 4z \right] \Bigg|_0^1 = \frac{11}{15} \left(\sqrt{3} - \sqrt{2} \right). \end{aligned}$$

Esercizio 5. (a) Utilizzando il metodo di variazione delle costanti arbitrarie, determinate una soluzione dell'equazione differenziale

$$x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = \mathrm{e}^{-t}\cos^2 t.$$

(b) Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) + 2x'(t) + 2x(t) = 4t + \mathrm{e}^{-t}\cos^2 t \\ x(0) = 0 \text{ e } x'(0) = 1. \end{cases}$$

Soluzione. (a) L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 2\lambda + 2 = 0$ le cui soluzioni complesse e coniugate sono date da $\lambda_\pm = -1 \pm i$. Quindi, le funzioni

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{-t}\cos t; \qquad x_2(t) = \mathrm{e}^{-t}\operatorname{sen} t;$$

con $t \in \mathbb{R}$ sono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e si può cercare una soluzione dell'equazione completa della forma

$$x_p(t) = c_1(t)\mathrm{e}^{-t}\cos t + c_2(t)\mathrm{e}^{-t}\operatorname{sen} t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con c_1 e c_2 funzioni di classe C^1 in $\mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} c_1'(t)x_1(t) + c_2'(t)x_2(t) = 0 \\ c_1'(t)x_1'(t) + c_2'(t)x_2'(t) = \mathrm{e}^{-t}\cos^2 t. \end{cases}$$

Deve quindi essere

$$\begin{cases} c_1'(t)\mathrm{e}^{-t}\cos t + c_2'(t)\mathrm{e}^{-t}\operatorname{sen} t = 0 \\ c_1'(t)\mathrm{e}^{-t}(\cos t + \operatorname{sen} t) - c_2'(t)\mathrm{e}^{-t}(\cos t - \operatorname{sen} t) = -\mathrm{e}^{-t}\cos^2 t \end{cases} \implies \begin{cases} c_1'(t) = -\cos^2 t \operatorname{sen} t \\ c_2'(t) = \cos^3 t \end{cases}$$

e integrando per c_1 si trova

$$c_1(t) = -\int \cos^2 t \operatorname{sen} t\, dt = \frac{1}{3}\cos^3 t + C, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C \in \mathbb{R}$ costante arbitraria mentre per c_2 si trova

$$c_2(t) = \int \cos^3 t\, dt = \int \left(1 - \operatorname{sen}^2 t\right)\cos t\, dt = \int \left(1 - x^2\right) dx\Big|_{x=\operatorname{sen} t} = \operatorname{sen} t - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^3 t + C, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C \in \mathbb{R}$ costante arbitraria. Una soluzione dell'equazione è quindi data da

$$x_p(t) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{-t}\cos^4 t + \operatorname{sen}^2 t\left(1 - \frac{1}{3}\operatorname{sen}^2 t\right)\mathrm{e}^{-t} = \frac{1}{3}\left(1 + \operatorname{sen}^2 t\right)\mathrm{e}^{-t}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(b) Tenendo conto di (a), tutte le soluzioni dell'equazione proposta sono le funzioni

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{-t}\cos t + C_2\mathrm{e}^{-t}\operatorname{sen} t + 2(t-1) + \frac{1}{3}\left(1 + \operatorname{sen}^2 t\right)\mathrm{e}^{-t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1,2)$ costanti arbitrarie. Scegliamo le costanti $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1,2)$ in modo che risulti $x(0) = 0$ e $x'(0) = 1$. Si ha

$$\begin{cases} x(0) = C_1 - 2 + 1/3 = 0 \\ x'(0) = -C_1 + C_2 + 2 - 1/3 = 1 \end{cases}$$

da cui segue $C_1 = 5/3$ e $C_2 = 1$. La soluzione cercata è dunque la funzione

$$x(t) = \frac{5}{3}\mathrm{e}^{-t}\cos t + \mathrm{e}^{-t}\operatorname{sen} t + 2(t-1) + \frac{1}{3}\left(1 + \operatorname{sen}^2 t\right)\mathrm{e}^{-t}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$
