COGNOME	____________________	NON SCRIVERE QUI
NOME	____________________	
MATRICOLA	|_|_|_|_|_|_|	
LAUREA	CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC	

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI

A.A. 2021-2022 — PARMA, 13 SETTEMBRE 2022

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Determinate tutti i punti (x, y) di $\mathbb{R}^2$ nei quali il gradiente della funzione $f(x, y) = x^4y^3$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, è ortogonale al vettore $v = (3, 4)$.

Soluzione. Le derivate parziali di f sono

$$f_x(x, y) = 4x^3y^3 \qquad \text{e} \qquad f_y(x, y) = 3x^4y^2$$

per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e quindi si ha

$$\nabla f(x, y) \perp \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \end{pmatrix} \qquad \Longleftrightarrow \qquad 12x^3y^3 + 12x^4y^2 = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^3y^2(y + x) = 0$$

Le soluzioni dell'equazione a destra sono $x = 0$, $y = 0$ e $x = y$ cui corrispondono i punti del piano di coordinate $(t, 0)$, $(0, t)$ e (t, t) cioè i punti che appartengono agli assi coordinati o alla bisettrice del secondo e quarto quadrante.

Esercizio 2. Calcolate l'integrale curvilineo

$$I = \int_\gamma \left(2x + 9\sqrt{3}z\right) \, dl(x, y, z)$$

ove $\gamma \colon [0, 1/3] \to \mathbb{R}^3$ è la curva parametrica definita da

$$\gamma(t) = te_1 + t^2e_2 + \sqrt{3}t^3e_3, \qquad t \in [0, 1/3].$$

Soluzione. Poiché la curva γ è liscia e la funzione $f(x, y, z) = 2x + 9\sqrt{3}z$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è continua, risulta

$$\begin{aligned}
I = \int_\gamma f \, dl &= \int_0^{1/3} f(t, t^2, \sqrt{3}t^3) \|\gamma'(t)\| \, dt = \\
&= \int_0^{1/3} (2t + 27t^3)\sqrt{1 + 4t^2 + 27t^4} \, dt = \\
&= \int_0^{1/3} (2t + 27t^3)\sqrt{1 + 4\left(t^2 + 27t^4/4\right)} \, dt = \\
&= \int_0^{7/36} \sqrt{1 + 4s} \, ds = \frac{1}{6} \left(1 + 4s\right)^{3/2} \Big|_0^{7/36} = \cdots = \frac{37}{162}.
\end{aligned}$$

Esercizio 3. Determinate la funzione $g \in C^1(\mathbb{R}^2)$ tale che $g(0,0) = 1$ che rende il campo vettoriale $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ di componenti

$$\begin{cases} f^1(x,y,z) = g(y,z) + 2xyz^2 \\ f^2(x,y,z) = 2xyz^2 + x^2z^2 \\ f^3(x,y,z) = 2xy^2z + 2x^2yz \end{cases}$$

conservativo. Per tale funzione g calcolate l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma f \cdot dl$$

del campo f lungo la curva parametrica definita da $\gamma(t) = \operatorname{sen}(\pi t/2)e_1 + \cos(\pi t/2)e_2 + t^2 e_3$, $t \in [0,1]$.

Soluzione. Essendo la funzione g di classe C^1 in $\mathbb{R}^2$, il campo vettoriale f risulta a sua volta essere di classe C^1 in $\mathbb{R}^3$ cosicché, essendo $\mathbb{R}^3$ un aperto convesso, esso è conservativo se e solo se è irrotazionale ovvero se e solo se risulta

$$f^1_y(x,y,z) = f^2_x(x,y,z); \qquad f^1_z(x,y,z) = f^3_x(x,y,z); \qquad f^2_z(x,y,z) = f^3_y(x,y,z);$$

per ogni (x,y,z). Le derivate in croce di f sono date da

$$\begin{array}{lll} f^1_y(x,y,z) = g_y(y,z) + 2xz^2; & f^2_x(x,y,z) = 2yz^2 + 2xz^2; & f^3_x(x,y,z) = 2y^2z + 4xyz; \\ f^1_z(x,y,z) = g_z(y,z) + 4xyz; & f^2_z(x,y,z) = 4xyz + 2x^2z; & f^3_y(x,y,z) = 4xyz + 2x^2z; \end{array}$$

per ogni (x,y,z) e quindi il campo f risulta irrotazionale in $\mathbb{R}^3$ se e solo si ha

$$g_y(y,z) + 2xz^2 = 2yz^2 + 2xz^2; \qquad g_z(y,z) + 4xyz = 2y^2z + 4xyz; \qquad 4xyz + 2x^2z = 4xyz + 2x^2z;$$

da cui segue evidentemente

$$g_y(y,z) = 2yz^2 \qquad \text{e} \qquad g_z(y,z) = 2y^2z$$

per ogni $(y,z) \in \mathbb{R}^2$. Tenuto conto della condizione $g(0,0) = 1$, si conclude che f è conservativo se e solo se g è la funzione definita da

$$g(y,z) = y^2z^2 + 1, \qquad (y,z) \in \mathbb{R}^2.$$

Per tale funzione g il potenziale di f che si annulla nell'origine è dato da

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= \int_0^x f^1(t,0,0)\,dt + \int_0^y f^2(x,t,0)\,dt + \int_0^z f^3(x,y,t)\,dt = \\ &= \int_0^x 1\,dt + \int_0^z \left(2xy^2t + 2x^2yt\right)\,dt = \\ &= x + xy^2z^2 + x^2yz^2 \end{aligned}$$

per ogni (x,y,z). Infine, essendo il campo f conservativo ed essendo γ una curva liscia di estremi $\gamma(0) = (0,1,0)$ e $\gamma(1) = (1,0,1)$, si ha

$$\int_\gamma f \cdot dl = F(1,0,1) - F(0,1,0) = 1.$$

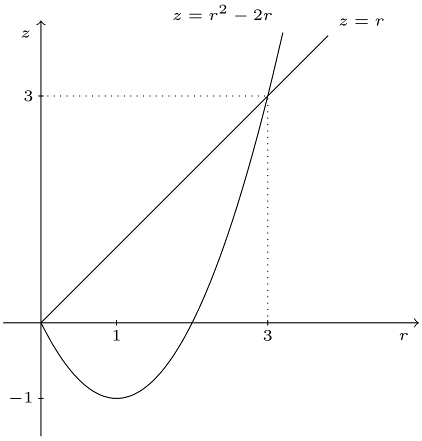
Esercizio 4. Sia

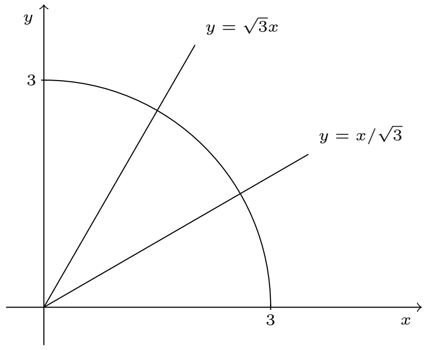
$$K=\left\{(x,y,z):\ x^2+y^2-2\sqrt{x^2+y^2}\le z\le\sqrt{x^2+y^2}\ \text{e}\ x\le\sqrt{3}y\le 3x\right\}.$$

(a) Descrivete e disegnate l'insieme K.

(b) Calcolate $I=\displaystyle\int_K x\,d(x,y,z)$.

Soluzione. L'insieme K è l'intersezione della parte del poliedro definito dai piani $y=x/\sqrt{3}$ e $y=\sqrt{3}x$ contenuta nel semispazio $x\ge 0$ con il solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la figura contenuta nel primo e nel quarto quadrante del piano rz (con $r=\sqrt{x^2+y^2}$) che sta al di sopra della parabola di equazione $z=r^2-2r$ e al di sotto della retta di equazione $z=r$ come illustrato nella figura a sinistra.





L'insieme K è compatto perché è limitato ed è intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue e quindi è (Lebesgue) misurabile. La funzione f definita da

$$f(x,y,z)=x,\qquad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,$$

è lineare e quindi è integrabile in K.
Calcoliamo I mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione di K sul piano xy è l'insieme

$$\pi_{xy}(K)=\left\{(x,y):\ \sqrt{x^2+y^2}\le 3\ \text{e}\ 0\le\frac{x}{\sqrt{3}}\le y\le\sqrt{3}x\right\}$$

rappresentato nella figura a destra e per ogni $(x,y)\in\pi_{xy}(K)$ la corrispondente sezione è l'intervallo

$$K_{(x,y)}=\left[x^2+y^2-2\sqrt{x^2+y^2},\sqrt{x^2+y^2}\right],\qquad (x,y)\in\pi_{xy}(K).$$

Per la formula di riduzione si ha allora

$$\begin{aligned}I=\int_K x\,d(x,y,z)&=\int_{\pi_{xy}(K)}\left(\int_{x^2+y^2-2\sqrt{x^2+y^2}}^{\sqrt{x^2+y^2}}x\,dz\right)d(x,y)=\\&=\int_{\pi_{xy}(K)}x\left[3\sqrt{x^2+y^2}-\left(x^2+y^2\right)\right]d(x,y)=\end{aligned}$$

e quindi, utilizzando coordinate polari per calcolare l'integrale a destra, si ottiene

$$\begin{aligned}&=\left(\int_{\pi/6}^{\pi/3}\cos\theta\,d\theta\right)\cdot\left(\int_0^3\left(3r-r^2\right)r^2\,dr\right)=\\&=\left(\frac{\sqrt{3}}{2}-\frac{1}{2}\right)\cdot\left(\frac{3}{4}r^4-\frac{1}{5}r\right)\Big|_0^3=\dots=\left(\sqrt{3}-1\right)\frac{243}{40}.\end{aligned}$$

Esercizio 5. Determinate la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) = 2(\operatorname{sen} t)x(t) + 2\cos t \operatorname{sen} t\sqrt{x(t)} \\ x(\pi/2) = 4. \end{cases}$$

Soluzione. L'equazione differenziale proposta è un'equazione di Bernoulli. La funzione a secondo membro è

$$f(t,x) = 2(\operatorname{sen} t)x + 2\cos t \operatorname{sen} t\sqrt{x}, \qquad (t,x) \in \mathbb{R} \times (0,+\infty),$$

ed è di classe $f \in C^\infty(\mathbb{R} \times (0,+\infty))$. Conseguentemente, il problema di Cauchy considerato ha soluzione massimale $x \in C^\infty(\alpha,\beta)$ con $-\infty \le \alpha < 0 < \beta \le +\infty$ che verifica la condizione $x(t) > 0$ per ogni $t \in (\alpha,\beta)$. Tale soluzione è prolungamento di ogni altra soluzione del medesimo problema di Cauchy.
La funzione

$$y(t) = [x(t)]^\lambda, \qquad t \in (\alpha,\beta),$$

con $\lambda \neq 0$ da determinare è di classe $C^\infty(\alpha,\beta)$ e, essendo $x(t)$ soluzione del problema di Cauchy considerato con $x(t) > 0$ per ogni $t \in (\alpha,\beta)$, risulta

$$\begin{aligned} y'(t) = \lambda[x(t)]^{\lambda-1}x'(t) = \lambda[x(t)]^{\lambda-1}\left(2(\operatorname{sen} t)x(t) + 2\cos t \operatorname{sen} t\sqrt{x(t)}\right) = \\ = 2\lambda(\operatorname{sen} t)y(t) + 2\lambda\cos t \operatorname{sen} t[x(t)]^{\lambda-1/2} \end{aligned}$$

con $y(t) > 0$ per ogni $t \in (\alpha,\beta)$. Scegliendo $\lambda = 1/2$, la funzione $y(t)$ per $t \in (\alpha,\beta)$ risulta essere soluzione positiva del problema di Cauchy

$$\begin{cases} z'(t) = (\operatorname{sen} t)z(t) + \cos t \operatorname{sen} t \\ z(0) = 2. \end{cases}$$

La soluzione di tale problema è

$$\begin{aligned} z(t) = \mathrm{e}^{-\cos t}\left\{2 + \int_{\pi/2}^{t} \cos s \operatorname{sen} s e^{\cos s}\, ds\right\} = \\ = \mathrm{e}^{-\cos t}\left[1 + (1-\cos t)\mathrm{e}^{\cos t}\right] = \mathrm{e}^{-\cos t} + 1 - \cos t \end{aligned}$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$ e quindi $y(t)$ coincide con $z(t)$ sull'intervallo aperto (α,β) contenente l'origine in cui risulta $z(t) > 0$. Si ha evidentemente

$$z(t) = \mathrm{e}^{-\cos t} + 1 - \cos t \ge \mathrm{e}^{-\cos t} > 0$$

per ogni t e quindi la soluzione massimale del problema di Cauchy proposto è

$$x(t) = \left[\mathrm{e}^{-\cos t} + 1 - \cos t\right]^2, \qquad t \in \mathbb{R}.$$