COGNOME	______________________	NON SCRIVERE QUI	
NOME	______________________	1 | 2 | 3 | 4 | 5	
MATRICOLA	|_|_|_|_|_|_|		
LAUREA	CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC		

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA
ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI
A.A. 2021-2022 — PARMA, 18 LUGLIO 2022

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Calcolate l'integrale curvilineo

$$I = \int_\gamma x\, dl(x, y, z)$$

ove $\gamma\colon [0, \sqrt{6/5}] \to \mathbb{R}^3$ è la curva parametrica definita da

$$\gamma(t) = te_1 + t^2 e_2 + 3t^2 e_3, \qquad t \in [0, \sqrt{6/5}].$$

Soluzione. Poiché la curva γ è liscia e la funzione $f(x, y, z) = x$, $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ è continua, risulta

$$I = \int_\gamma f\, dl = \int_0^{\sqrt{6/5}} f\left(t, t^2, 3t^2\right) \|\gamma'(t)\|\, dt =$$

$$= \int_0^{\sqrt{6/5}} t\sqrt{1 + 4t^2 + 36t^2}\, dt = \frac{1}{120}\left(1 + 40t^2\right)^{3/2}\Big|_0^{\sqrt{6/5}} = \frac{1}{120}\left(7^3 - 1\right) = \frac{342}{120} = \frac{171}{60}.$$

Esercizio 2. Determinate tutte le soluzioni $x(t)$ dell'equazione differenziale

$$x''(t) - x(t) = 1$$

che verificano $x(0) = 0$ e $\lim_{t\to+\infty} x(t) = -1$.

Soluzione. Le soluzioni dell'equazione caratteristica sono i numeri reali $\lambda_\pm = \pm 1$ e una soluzione dell'equazione completa è evidentemente data dalla funzione costante

$$x_p(t) = -1, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione completa sono le funzioni

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{-t} + C_2 \mathrm{e}^{t} - 1, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie. Affinché il limite di $x(t)$ per $t \to +\infty$ sia finito deve essere $C_2 = 0$ e per avere $x(0) = 0$ deve poi essere $C - 1 = 1$. Pertanto, l'unica soluzione dell'equazione differenziale proposta che verifica le condizioni richieste è la funzione

$$x(t) = \mathrm{e}^{-t} - 1, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Esercizio 3. Sia
$$f(x,y,z) = x^4 - 4x^2 + y^2 + 4z^2 - 8xz, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Determinate gli eventuali punti critici di f e stabilitene la natura.

(b) Determinate l'immagine $f(\mathbb{R}^3)$.

Soluzione. (a) La funzione f è un polinomio e quindi è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Le derivate parziali di f sono date da
$$f_x(x,y,z) = 4x^3 - 8x - 8z; \qquad f_y(x,y,z) = 2y; \qquad f_z(x,y,z) = 8z - 8x;$$
per ogni (x,y,z) e quindi i punti critici sono le soluzioni del sistema formato dalle equazioni
$$\begin{cases} 4x^3 - 8x - 8z = 0 \\ 2y = 0 \\ 8z - 8x = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^3 - 2x - 2z = 0 \\ y = 0 \\ z = x \end{cases} \iff \begin{cases} x\left(x^2 - 4\right) = 0 \\ y = 0 \\ z = x \end{cases}$$
cui corrispondono i punti di coordinate
$$P = (0,0,0); \qquad Q_\pm = (\pm 2, 0, \pm 2).$$
La funzione f ha dunque tre punti critici. Poiché risulta $f(-x,y,-z) = f(x,y,z)$ per ogni (x,y,z), i due punti Q_+ e Q_- hanno la stessa natura.
Per determinare la natura dei punti critici, calcoliamo la matrice hessiana di f che è
$$D^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 8 & 0 & -8 \\ 0 & 2 & 0 \\ -8 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$
per ogni (x,y,z). Posto
$$\Delta_m = \det\left((D^2 f)_h^k \right)_{1 \le h,k \le m}, \qquad m = 1,2,3,$$
per il criterio di Sylvester si ha
$$D^2 f(P) = \begin{pmatrix} -8 & 0 & -8 \\ 0 & 2 & 0 \\ -8 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad \Delta_1 = -8,\ \Delta_2 = -16 \text{ e } \Delta_3 = -256 \qquad \Longrightarrow \qquad \text{punto di sella;}$$
$$D^2 f(Q_\pm) = \begin{pmatrix} 40 & 0 & -8 \\ 0 & 2 & 0 \\ -8 & 0 & 8 \end{pmatrix} \qquad \Delta_1 = 40,\ \Delta_2 = 80 \text{ e } \Delta_3 = 512 \qquad \Longrightarrow \qquad \text{punti di minimo.}$$

(b) Dalla disuguaglianza $ab \ge -(a^2 + b^2)/2$ con $a = 4x$ e $b = 2z$ segue
$$f(x,y,z) \ge x^4 - 12x^2 + y^2 + 2z^2 = \left(x^4 - 18x^2\right) + 6x^2 + y^2 + 2z^2$$
per ogni (x,y,z). Poiché risulta
$$\min_{x \in \mathbb{R}} \left(x^4 - 18x^2\right) = \left(x^4 - 18x^2\right)\Big|_{x^2=9} = -81,$$
si ha
$$f(x,y,z) \ge 6x^2 + y^2 + 2z^2 - 81 \ge x^2 + y^2 + z^2 - 81, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$
Risulta quindi $f(x,y,z) \to +\infty$ per $(x,y,z) \to \infty$ e dunque f ammette minimo globale per il teorema di Weierstrass generalizzato. Per (a) il minimo globale è assunto nei punti di coordinate $Q_\pm$ da cui segue
$$f(\mathbb{R}^3) = [f(Q_\pm, +\infty) = [-16, +\infty)$$
per il teorema dei valori intermedi.

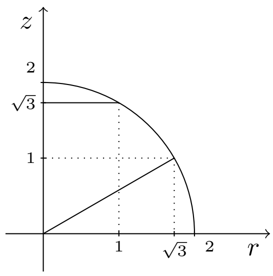
Esercizio 4. Sia

$$K = \left\{(x,y,z) : \ x^2+y^2+z^2 \le 4 \text{ e } \sqrt{x^2+y^2} \le \sqrt{3}z \le 3\right\}.$$

(a) Descrivete e disegnate l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K z\, d(x,y,z)$.

Soluzione. L'insieme K è la parte della palla di centro nell'origine e raggio $R = 2$ che sta al di sopra del cono di equazione $z = \sqrt{(x^2+y^2)/3}$ e al di sotto del piano di equazione $z = \sqrt{3}$. L'insieme K è il solido di di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la figura contenuta nel primo quadrante del piano rz (con $r = \sqrt{x^2+y^2}$) compresa tra la circonferenza di equazione $r^2 + z^2 = 4$ e le rette di equazione $z = r/\sqrt{3}$ e $z = \sqrt{3}$ come illustrato nella figura seguente.



L'insieme K è compatto perché è limitato ed è intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue e quindi è (Lebesgue) misurabile. La funzione f definita da

$$f(x,y,z) = z, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

è lineare e quindi è integrabile in K.
Calcoliamo I mediante la formula di riduzione per strati. La proiezione di K sull'asse z è l'intervallo $\pi_z(K) = [0,2]$ e per ogni z siffatto la corrispondente sezione è l'insieme

$$K^z = \begin{cases} \left\{(x,y) : \ \sqrt{x^2+y^2} \le \sqrt{3}z\right\}, & \text{se } 0 \le z \le 1 \\ \left\{(x,y) : \ \sqrt{x^2+y^2} \le \sqrt{4-z^2}\right\}, & \text{se } 1 \le z \le \sqrt{3}. \end{cases}$$

Per la formula di riduzione si ha allora

$$\begin{aligned} I = \int_K z\, d(x,y,z) &= \int_0^1 \left(\int_{K^z} z\, d(x,y)\right) dz + \int_1^{\sqrt{3}} \left(\int_{K^z} z\, d(x,y)\right) dz = \\ &= \int_0^1 z|K^z|\, dz + \int_1^{\sqrt{3}} z|K^z|\, dz = \\ &= \int_0^1 3\pi z^3\, dz + \int_1^{\sqrt{3}} \pi z\left(4-z^2\right) dz = \\ &= \frac{3}{4}\pi + \left[-\frac{\pi}{4}\left(4-z^2\right)^2\right]\Big|_1^{\sqrt{3}} = \frac{3}{4}\pi - \frac{\pi}{4} + \frac{9}{4}\pi = \frac{11}{4}\pi. \end{aligned}$$

Esercizio 5. Determinate la soluzione massimale del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = [x(t)]^4 + \dfrac{1}{[x(t)]^2} \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Soluzione. L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili. La funzione a secondo membro è $f(t,x) = g(t)h(x)$ con

$$g(t) = 1, \qquad t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad h(x) = x^4 + \frac{1}{x^2} = \frac{x^6+1}{x^2}, \qquad x \neq 0$$

e, tenuto conto della condizione iniziale $x(0) = 1$, non è restrittivo considerare h definita nell'intervallo $(0,+\infty)$. In tale intervallo la funzione h è infinite volte derivabile e quindi il problema di Cauchy considerato ha soluzione massimale $x \in C^\infty(\alpha,\beta)$ con $-\infty \leq \alpha < 0 < \beta \leq +\infty$. Tale soluzione è prolungamento di ogni altra soluzione del medesimo problema di Cauchy.
Essendo $h(x) > 0$ per $x > 0$, la soluzione massimale verifica $x(t) > 0$ per ogni $\alpha < t < \beta$. Ponendo

$$H(y) = \int_1^y \frac{z^2}{z^6+1}\,dz = \frac{1}{3}\int_1^{y^3} \frac{1}{u^2+1}\,du = \frac{1}{3}\arctan z\Big|_1^{y^3} = = \frac{1}{3}\arctan y^3 - \frac{\pi}{12}$$

per ogni $y > 0$, si deduce che la funzione composta $H \circ x$ è in $C^\infty(\alpha,\beta)$ e verifica $(H \circ x)'(t) = 1$ per $\alpha < t < \beta$ e $H \circ x(0) = 0$. Dunque, per il teorema fondamentale del calcolo, deve essere $(H \circ x)(t) = t$ per $\alpha < t < \beta$ da cui segue con semplici calcoli

$$x(t) = \sqrt[3]{\tan\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)}, \qquad \alpha < t < \beta.$$

Poiché si ha

$$\lim_{y \to 0^+} H(y) = -\frac{\pi}{12} \qquad \text{e} \qquad \lim_{y \to +\infty} H(y) = \frac{\pi}{6} - \frac{\pi}{12} = \frac{\pi}{12},$$

si conclude che risulta

$$\alpha = -\frac{\pi}{12} \qquad \text{e} \qquad \beta = \frac{\pi}{12}.$$

La soluzione massimale è dunque

$$x(t) = \sqrt[3]{\tan\left(3t + \frac{\pi}{4}\right)}, \qquad |t| < \frac{\pi}{12}.$$