Cognome	____________________	Non scrivere qui	
Nome	____________________	1 | 2 | 3 | 4 | 5	
Matricola	⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌋		
Laurea	Civ Amb Gest Inf Eln Tlc Mec		

Università degli Studi di Parma
Dipartimento di Ingegneria e Architettura
Esame di Analisi Matematica 2 — Soluzioni
A.A. 2021-2022 — Parma, 15 Giugno 2022

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore e mezza. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Sia

$$f(x,y) = \sqrt{x^2+y^2}\left(2x^2+2y^2-12\right)+3x^2+3y^2, \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Determinate l'immagine $f(A)$ dell'insieme $A=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ -4\le x^2+y^2\le 4\right\}$.

Soluzione. La funzione f dipende da (x,y) solo attraverso la quantità $r=\sqrt{x^2+y^2}\ge 0$. Denotato quindi con $p\colon[0,+\infty)\to\mathbb{R}$ il polinomio nella variabile r definito da

$$p(r) = r\left(2r^2-12\right)+3r^2 = 2r^3+3r^2-12r, \qquad r\ge 0,$$

risulta $f(A)=p([0,2])$ e per il teorema dei valori intermedi si ha

$$p([0,2]) = \left[\min_{0\le r\le 2} p(r),\ \max_{0\le r\le 2} p(r)\right].$$

Determiniamo quindi il minimo e il massimo globale di p. La derivata di p è $p'(r)=12(r^2-1)$, $r\ge 0$, e quindi il minimo globale di p in $[0,2]$ è assunto nel punto $r=1$ mentre il massimo globale è assunto in uno degli estremi $r=0$ o $r=2$. Essendo $p(0)=0<4=p(2)$ e $p(1)=-7$, si conclude che risulta

$$f(A) = g([0,2]) = [-7,4].$$

Esercizio 2. Sia

$$f(x,y) = x^4y^2+x^3y^3, \qquad (x,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Determinate per quali versori $v\in\mathbb{R}^2$ risulta nulla la derivata direzionale $\partial_v f(-1,1)$.

Soluzione. Essendo un polinomio, la funzione f è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^2$ e le sue derivate parziali nel punto di coordinate $(-1,1)$ sono

$$\begin{aligned} f_x(-1,1) &= 4^3y^2+3x^2y^3\big|_{x=-1 \text{ e } y=1} = -4+3 = -1;\\ f_y(-1,1) &= 2x^4y+3x^3y^2\big|_{x=-1 \text{ e } y=1} = 2-3=-1. \end{aligned}$$

Il gradiente di f in $(-1,1)$ è quindi il vettore $\nabla f(-1,1)=(-1,-1)$ e dunque la derivata direzionale di f nel punto di coordinate $(-1,1)$ nella direzione del versore $v=(a,b)$ è data da

$$\partial_v f(-1,1) = \langle \nabla f(-1,1)\,|\begin{pmatrix} a\\ b\end{pmatrix}\rangle = -a-b.$$

Deve quindi essere $-a-b=0$ e $\sqrt{a^2+b^2}=1$ da cui segue $v=\pm(1/\sqrt{2},-1/\sqrt{2})$.

Esercizio 3. Determinate tutte le funzioni $g, h \in C^1(\mathbb{R})$ con $g(0) = h(0) = 0$ che rendono il campo vettoriale $f \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ di componenti

$$\begin{cases} f^1(x, y, z) = g(y) + h(z) + yz \\ f^2(x, y, z) = \dfrac{x - z}{1 + y^2} + 2h(z) + xz \\ f^3(x, y, z) = \dfrac{2(x + 2y)z}{1 + z^2} - g(y) + xy \end{cases}$$

conservativo. Per tali funzioni g e h, calcolate l'integrale curvilineo

$$\int_\gamma f \cdot dl$$

del campo f lungo la curva parametrica definita da $\gamma(t) = te_1 + \mathrm{sen}\,(\pi t/2)e_2 + t^2 e_3$, $t \in [0, 1]$.

Soluzione. Essendo le funzioni g e h di classe C^1 in $\mathbb{R}$, il campo vettoriale f risulta a sua volta essere di classe C^1 in $\mathbb{R}^3$ cosicché, essendo $\mathbb{R}^3$ un aperto convesso, esso è conservativo se e solo se è irrotazionale ovvero se e solo se risulta

$$f^1_y(x, y, z) = f^2_x(x, y, z); \qquad f^1_z(x, y, z) = f^3_x(x, y, z); \qquad f^2_z(x, y, z) = f^3_y(x, y, z);$$

per ogni (x, y, z). Le derivate in croce di f sono date da

$$\begin{aligned} &f^1_y(x, y, z) = g'(y) + z; \qquad f^2_x(x, y, z) = \frac{1}{1 + y^2} + z; \qquad f^3_x(x, y, z) = \frac{2z}{1 + z^2} + y; \\ &f^1_z(x, y, z) = h'(z) + y; \qquad f^2_z(x, y, z) = -\frac{1}{1 + y^2} + 2h'(z) + x; \qquad f^3_y(x, y, z) = \frac{4z}{1 + z^2} - g'(y) + x; \end{aligned}$$

per ogni (x, y, z) e quindi il campo f risulta irrotazionale in $\mathbb{R}^3$ se e solo si ha

$$g'(y) + z = \frac{1}{1 + y^2} + z; \qquad h'(z) + y = \frac{2z}{1 + z^2} + y; \qquad -\frac{1}{1 + y^2} + 2h'(z) + x = \frac{4z}{1 + z^2} - g'(y) + x;$$

da cui segue

$$g'(y) = \frac{1}{1 + y^2} \qquad \text{e} \qquad h'(z) = \frac{2z}{1 + z^2}$$

per ogni y e z. Tenuto conto della condizione $g(0) = h(0) = 0$, si conclude che f è conservativo se e solo se risulta

$$g(y) = \arctan y, \quad y \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad h(z) = \log(1 + z^2), \quad z \in \mathbb{R}.$$

Per tali funzioni g e h i potenziali di f sono dati da

$$\begin{aligned} F(x, y, z) &= \int_0^x f^1(t, 0, 0)\, dt + \int_0^y f^2(x, t, 0)\, dt + \int_0^z f^3(x, y, t)\, dt = \\ &= \int_0^y \frac{x}{1 + t^2}\, dt + \int_0^z \left[(x + 2y)\frac{2t}{1 + t^2} - \arctan y + xy\right] dt = \\ &= x \arctan y + (x + 2y) \log(1 + z^2) - z \arctan y + xyz + C = \\ &= (x - z) \arctan y + (x + 2y) \log(1 + z^2) + xyz + C \end{aligned}$$

per ogni (x, y, z) con $C \in \mathbb{R}$ costante arbitraria. Infine, essendo il campo f conservativo ed essendo γ una curva liscia di estremi $\gamma(0) = (0, 0, 0)$ e $\gamma(1) = (1, 1, 1)$, si ha

$$\int_\gamma f \cdot dl = F(1, 1, 1) - F(0, 0, 0) = 3 \log 2 + 1.$$

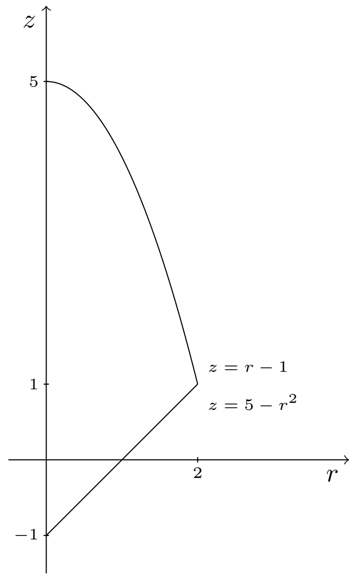
Esercizio 4. Sia

$$K = \left\{(x,y,z):\ -1+\sqrt{x^2+y^2} \le z \le 5-x^2-y^2 \text{ e } 0 \le x \le y\right\}.$$

(a) Descrivete e disegnate l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K xy\, d(x,y,z)$.

Soluzione. L'insieme K è l'intersezione della parte del poliedro definito dai piani $x = 0$ e $y = x$ contenuta nel semispazio con il solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la figura contenuta nel primo quadrante del piano rz (con $r = \sqrt{x^2+y^2}$) compresa tra l'asse z, la retta di equazione di $z = r-1$ e la parabola $z = 5-r^2$ per $r \ge 0$ come illustrato nella figura seguente.



L'insieme K è compatto perché è limitato ed è intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue e quindi è (Lebesgue) misurabile. La funzione f definita da

$$f(x,y,z) = xy, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

è un polinomio e quindi è integrabile in K.
Calcoliamo I mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione di K sul piano xy è la porzione di cerchio

$$\pi_{xy}(K) = \left\{(x,y):\ \sqrt{x^2+y^2} \le 2 \text{ e } 0 \le x \le y\right\}$$

e per ogni $(x,y) \in \pi_{xy}(K)$ la corrispondente sezione è l'intervallo

$$K_{(x,y)} = \left[\sqrt{x^2+y^2}-1, 5-\left(x^2+y^2\right)\right], \qquad (x,y) \in \pi_{xy}(K).$$

Per la formula di riduzione si ha allora

$$\begin{aligned} I = \int_K xy\, d(x,y,z) &= \int_{\pi_{xy}(K)} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}-1}^{5-(x^2+y^2)} xy\, dz\right) d(x,y) = \\ &= \int_{\pi_{xy}(K)} xy \left\{\left[5-(x^2+y^2)\right] - \left(\sqrt{x^2+y^2}-1\right)\right\} d(x,y) \end{aligned}$$

e, utilizzando coordinate polari nel piano abbinate nuovamente alla formula di riduzione, risulta

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, d\theta \int_0^2 r^3\left(6-r-r^2\right) dr = \\ &= \frac{1}{2}\operatorname{sen}^2 t\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\frac{6}{4}r^4 - \frac{1}{5}r^5 - \frac{1}{6}r^6\right)\Big|_0^2 = \frac{1}{4}\left(\frac{96}{4} - \frac{32}{5} - \frac{64}{6}\right) = 6 - \frac{8}{5} - \frac{8}{3} = \frac{26}{15}. \end{aligned}$$

Esercizio 5. Data l'equazione differenziale

$$x''(t) - 2x'(t) + x(t) = \mathrm{e}^t \cos^2 t,$$

determinate

(a) tutte le soluzioni dell'equazione differenziale;

(b) la soluzione del problema di Cauchy con $x(0) = 1$ e $x'(1) = 2$.

Soluzione. (a) L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 2\lambda + 1 = (\lambda - 1)^2 = 0$ che ha una sola soluzione reale $\lambda = 1$. Quindi, le funzioni

$$x_1(t) = \mathrm{e}^t; \qquad x_2(t) = t\mathrm{e}^t;$$

con $t \in \mathbb{R}$ sono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^t + C_2 t\mathrm{e}^t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
Per determinare una soluzione dell'equazione completa procediamo con il metodo della variazione delle costanti arbitrarie cercando una soluzione $x_p(t)$ della forma

$$x_p(t) = c_1(t)\mathrm{e}^t + c_2(t)t\mathrm{e}^t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $c_1(t)$ e $c_2(t)$ funzioni di classe C^1 in $\mathbb{R}$ da determinare in modo che risulti

$$\begin{cases} c_1'(t)\mathrm{e}^t + c_2'(t)t\mathrm{e}^t = 0 \\ c_1'(t)\mathrm{e}^t + c_2'(t)t\mathrm{e}^t + c_2'(t)\mathrm{e}^t = \mathrm{e}^t \cos^2 t \end{cases}$$

per ogni t. Il sistema precedente è equivalente a

$$\begin{cases} c_1'(t) = -t\cos^2 t \\ c_2'(t) = \cos^2 t \end{cases} \qquad t \in \mathbb{R}.$$

da cui segue

$$c_2(t) = \int \cos^2 t\, dt = \frac{t + \cos t \operatorname{sen} t}{2}$$

e

$$c_1(t) = -\int t\cos^2 t\, dt = -t\frac{t + \cos t \operatorname{sen} t}{2} + \int \frac{t + \cos t \operatorname{sen} t}{2}\, dt = -t\frac{t + \cos t \operatorname{sen} t}{2} + \frac{t^2}{4} + \frac{1}{4}\operatorname{sen}^2 t$$

per tutti i t a meno di inessenziali costanti additive. Risulta così

$$x_p(t) = \frac{1}{4}\left(\operatorname{sen}^2 t + t^2\right)\mathrm{e}^t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

e quindi tutte le soluzioni dell'equazione completa sono le funzioni

$$x(t) = (C_1 + C_2 t)\,\mathrm{e}^t + \frac{1}{4}\left(\operatorname{sen}^2 t + t^2\right)\mathrm{e}^t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
(b) Imponendo che sia $x(0) = 1$ e $x'(0) = 2$, si trova $C_1 = C_2 = 1$ cosicché la soluzione cercata è

$$x(t) = (1 + t)\mathrm{e}^t + \frac{1}{4}\left(\operatorname{sen}^2 t + t^2\right)\mathrm{e}^t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$