Cognome	______________________	Non scrivere qui	
Nome	______________________	1 | 2 | 3 | 4 | 5	
Matricola	└┴┴┴┴┴┘		
Laurea	Civ Amb Gest Inf Eln Tlc Mec		

Università degli Studi di Parma

Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Esame di Analisi Matematica 2 — Soluzioni

A.A. 2021-2022 — Parma, 11 Aprile 2022

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Calcolate la matrice hessiana della funzione $f(x,y) = \cos(x^2 + y^3)$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, nel punto di coordinate $(1,-1)$.

Soluzione. La funzione f è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^2$ poiché composizione di un polinomio e della funzione $t \in \mathbb{R} \mapsto \cos t$. Le derivate parziali di f sono

$$f_x(x,y) = -2x \operatorname{sen}(x^2+y^3) \qquad \text{e} \qquad f_y(x,y) = -3y^2 \operatorname{sen}(x^2+y^3)$$

per ogni (x,y) e le derivate parziali seconde sono

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y) &= -2\operatorname{sen}(x^2+y^3) - 4x^2\cos(x^2+y^2);\\ f_{yy}(x,y) &= -6y\operatorname{sen}(x^2+y^3) - 9y^4\cos(x^2+y^3);\\ f_{yx}(x,y) = f_{xy}(x,y) &= -6xy^2\cos(x^2+y^3); \end{aligned}$$

per ogni (x,y). Pertanto, la matrice hessiana di f in $(1,-1)$ è

$$D^2 f(1,-1) = \begin{pmatrix} f_{xx}(1,-1) & f_{xy}(1,-1) \\ f_{yx}(1,-1) & f_{yy}(1,-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & -6 \\ -6 & -9 \end{pmatrix}$$

Esercizio 2. Calcolate la lunghezza $L(\gamma)$ della curva parametrica $\gamma\colon [0,\pi/2] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = 2\left(\operatorname{sen}^2 t\right) e_1 + \left(\operatorname{sen}^3 t\right) e_2, \qquad 0 \le t \le \pi/2.$$

Soluzione. La curva γ è liscia e quindi è rettificabile. Si ha

$$\gamma'(t) = 4(\operatorname{sen} t\cos t)\, e_1 + 3\left(\operatorname{sen}^2 t\cos t\right) e_2, \qquad 0 \le t \le \pi/2,$$

da cui segue

$$\begin{aligned} L(\gamma) = \int_0^{\pi/2} \|\gamma'(t)\|\,dt &= \int_0^{\pi/2} \sqrt{16\operatorname{sen}^2 t\cos^2 t + 9\operatorname{sen}^4 t\cos^2 t}\,dt = \\ &= \int_0^{\pi/2} \operatorname{sen} t\cos t\sqrt{16 + 9\operatorname{sen}^2 t}\,dt = \\ &= \frac{1}{2}\int_0^1 \sqrt{16+9u}\,du = \frac{1}{27}(1+9s)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{125-64}{27} = \frac{61}{27}. \end{aligned}$$

Esercizio 3. Sia Γ la curva ottenuta come intersezione tra il cilindro di equazione $x^2+y^2=1$ e il piano di equazione $x+z=0$.

(a) Verificate che Γ è una curva ($1-$superficie) regolare e compatta in $\mathbb{R}^3$.

(b) Calcolate il massimo ed il minimo globale su Γ della funzione

$$f(x,y,z) = x + yz, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Soluzione. (a) Sia $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ la funzione di componenti $\Phi = \left(\Phi^1, \Phi^2\right)$ definite da

$$\Phi^1(x,y,z) = x^2 + 2y^2 - 1 \qquad \text{e} \qquad \Phi^2(x,y,z) = x + z$$

per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ cosicché risulta $\Gamma = \Phi^{-1}(0,0)$. Si ha

$$D\Phi(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

e risulta $\operatorname{rk} D\Phi(x,y,z) \leq 1$ se e solo se tutti i minori di ordine due della matrice $D\Phi(x,y,z)$ sono nulli. Ciò accade solo per $x = y = 0$ e nessun punto di coordinate $(0,0,z)$ appartiene a Γ per alcun $z \in \mathbb{R}$. Pertanto, Γ risulta essere una $1-$superficie regolare di $\mathbb{R}^3$. Inoltre, l'insieme Γ è evidentemente chiuso perché controimmagine di un punto mediante una funzione continua ed è anche limitato poiché dalle equazioni che lo definiscono si ricava che deve essere $|x|, |y|, |z| \leq 1$ per ogni punto $(x,y,z) \in \Gamma$.

(b) Essendo un polinomio, la funzione f è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^2$ e quindi ha minimo e massimo globale su Γ per il teorema di Weierstrass e, essendo Γ una curva regolare, gli estremi globali possono essere cercati con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Le corrispondenti equazioni sono

$$(*) \qquad \begin{cases} 1 - 2\lambda x - \mu = 0 \\ z - 2\lambda y = 0 \\ y - \mu = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 = 1 \\ x + z = 0. \end{cases}$$

Consideriamo il sistema lineare nelle incognite x, y e z formato dalle prime tre equazioni. Il determinante della relativa matrice dei coefficienti si annulla solo per $\lambda = 0$ da cui segue $\mu = 1$. Per tali valori dei parametri λ e μ le soluzioni del sistema sono date da $x \in \mathbb{R}$, $y = 0$ e $z = 0$ e nessun punto con tali coordinate appartiene a Γ. Per $\lambda \neq 0$, il sistema ha come unica soluzione

$$x = \frac{1-\mu}{2\lambda}; \qquad y = \mu; \qquad z = 2\lambda\mu.$$

Sostituendo tali valori nelle equazioni che definiscono Γ si ottiene

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1-\mu}{2\lambda}\right)^2 + \mu^2 = 1 \\ \dfrac{1-\mu}{2\lambda} + 2\lambda\mu = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} (1-\mu)^2 + 4\lambda^2\mu^2 = 4\lambda^2 \\ \mu\left(1 - 4\lambda^2\right) = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} \mu = \dfrac{1}{1-4\lambda^2} \\ \left(1-4\lambda^2\right)^2 = 1 + 4\lambda^2 \end{cases}$$

con $\lambda \neq \pm 1/2$ da cui segue $\lambda = 0$ e $\mu = 1$ cui corrisponde il punto di coordinate $P = (0,1,0)$ oppure $\lambda = \pm\sqrt{3}/2$ e $\mu = -1/2$ cui corrispondono i punti di coordinate $Q_\pm = (\pm\sqrt{3}/2, -1/2, \mp\sqrt{3}/2)$ (due punti). Alternativamente, per la risoluzione del sistema dei moltiplicatori di Lagrange si può procedere eliminando μ e z grazie alle ultime due equazioni di $(*)$ e ricavando così il sistema di equazioni

$$\begin{cases} 2\lambda x + y = 1 \\ x + 2\lambda y = 0 \end{cases} \qquad \text{e} \qquad x^2 + y^2 = 1.$$

Il sistema lineare formato dalle prime due equazioni non ha soluzione per $\lambda = \pm 1/2$ mentre per $\lambda \neq \pm 1/2$ si trova

$$x = -\frac{2\lambda}{1-4\lambda^2} \qquad \text{e} \qquad y = \frac{1}{1-4\lambda^2}$$

e, sostituendo poi in $x^2 + y^2 = 1$, si ottiene l'equazione $\left(1-4\lambda^2\right)^2 = 1 + 4\lambda^2$ già trovata in precedenza da cui si ottengono i punti P e $Q_\pm$ come prima.

Infine, i valori di f nei punti P e $_\pm$ sono

$$f(P) = 0 \qquad \text{e} \qquad f(Q_\pm) = \pm 3\sqrt{3}/2$$

e quindi Q_+ e Q_- risultano essere rispettivamente punto di massimo e minimo globale di f su Γ.

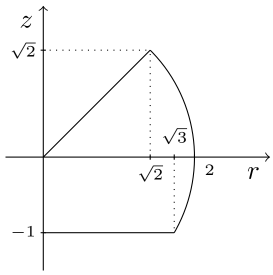
Esercizio 4. Sia

$$K = \left\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2 \le 4,\ -1 \le z \le \sqrt{x^2+y^2} \text{ e } x,y \ge 0\right\}.$$

(a) Descrivete e disegnate l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \int_K z\, d(x,y,z)$.

Soluzione. L'insieme K è la porzione della palla con centro nell'origine e raggio $R = 2$ che sta al di sotto del cono di equazione $z = \sqrt{x^2+y^2}$ e contenuta nei semispazi $z \ge -1$, $x \ge 0$ e $y \ge 0$. A meno delle condizioni $x,y \ge 0$, esso è il solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la figura contenuta nel primo quadrante del piano rz (con $r = \sqrt{x^2+y^2}$) compresa tra le retta $z = -1$ e $z = r$ per $0 \le r \le 2$ e la circonferenza di equazione $r^2+z^2 = 4$ come illustrato nella figura seguente.



L'insieme K è compatto perché è limitato ed è intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue e quindi è (Lebesgue) misurabile. La funzione f definita da

$$f(x,y,z) = z \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

è lineare e quindi è integrabile in K.
Calcoliamo I mediante la formula di riduzione per strati. La proiezione di K sull'asse z è l'intervallo $\pi_z(K) = [-1, \sqrt{2}]$ e per ogni z siffatto la corrispondente sezione è l'insieme

$$K^z = \begin{cases} \left\{(x,y):\ 0 \le \sqrt{x^2+y^2} \le \sqrt{4-z^2} \text{ e } x,y \ge 0\right\}, & \text{se } -1 \le z \le 0 \\ \left\{(x,y):\ z \le \sqrt{x^2+y^2} \le \sqrt{4-z^2} \text{ e } x,y \ge 0\right\}, & \text{se } 0 \le z \le \sqrt{2}. \end{cases}$$

Per la formula di riduzione si ha allora

$$I = \int_K z\, d(x,y,z) = \int_{-1}^{\sqrt{2}} \left(\int_{K^z} z\, d(x,y) \right) dz$$

e per ogni $z \in [-1, \sqrt{2}]$ risulta per evidenti motivi geometrici

$$\int_{K^z} z d(x,y) = \begin{cases} \frac{1}{4} z\pi \left(4 - z^2\right) & \text{se } -1 \le z \le 0 \\ \frac{1}{4} z\pi \left[\left(4-z^2\right) - z^2\right] & \text{se } 0 \le z \le \sqrt{2} \end{cases}$$

da cui segue infine

$$\begin{aligned} I &= \frac{\pi}{4} \int_{-1}^{0} z\left(4-z^2\right) dz + \frac{\pi}{2} \int_0^{\sqrt{2}} z\left(2-z^2\right) dz = \\ &= -\frac{\pi}{16}\left(4-z^2\right)^2 \Big|_{-1}^{0} - \frac{\pi}{8}\left(2-z^2\right)^2 \Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{9}{16}\pi - \pi + \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{16}. \end{aligned}$$

Esercizio 5. Determinate la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) = -\dfrac{x(t)}{t+1} + [x(t)]^2 \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Soluzione. La funzione a secondo membro è

$$f(t,x) = -\frac{x}{t+1} + x^2, \qquad (t,x) \in U = (-1,+\infty) \times \mathbb{R},$$

ed è di classe $f \in C^\infty(U)$. Conseguentemente, il problema di Cauchy considerato ha soluzione massimale $x \in C^\infty(\alpha,\beta)$ con $-1 \le \alpha < 0 < \beta \le +\infty$. Tale soluzione è prolungamento di ogni altra soluzione del medesimo problema di Cauchy.
Poiché la soluzione del medesimo problema di Cauchy con dato iniziale $x_0 = 0$ è la funzione identicamente nulla $x(t) = 0$ per ogni $t > -1$, la soluzione massimale del problema di Cauchy considerato verifica la condizione $x(t) > 0$ per ogni $t \in (\alpha,\beta)$. La funzione

$$y(t) = [x(t)]^\lambda, \qquad t \in (\alpha,\beta),$$

con $\lambda \neq 0$ da determinare è di classe $C^\infty(\alpha,\beta)$ e, essendo $x(t)$ soluzione del problema di Cauchy considerato con $x(t) > 0$ per ogni $t \in (\alpha,\beta)$, risulta

$$y'(t) = \lambda[x(t)]^{\lambda-1}x'(t) = \lambda[x(t)]^{\lambda-1}\left(-\frac{x(t)}{t+1} + [x(t)]^2\right) = -\frac{\lambda}{t+1}y(t) + \lambda[x(t)]^{\lambda+1}$$

con $y(t) > 0$ per ogni $t \in (\alpha,\beta)$ e $y(0) = x_0^\lambda$. Scegliendo $\lambda = -1$, la funzione $y(t)$ per $t \in (\alpha,\beta)$ risulta essere soluzione positiva del problema di Cauchy

$$\begin{cases} z'(t) = \dfrac{z(t)}{t+1} - 1 \\ z(0) = 1. \end{cases}$$

La soluzione di tale problema è

$$z(t) = (t+1)\left[1 - \int_0^t \frac{1}{s+1}\,ds\right] = (t+1)\left[1 - \log(t+1)\right], \qquad t > -1,$$

e quindi $y(t)$ coincide con $z(t)$ sull'intervallo aperto (α,β) contenente l'origine in cui risulta $z(t) > 0$. Risolvendo tale disequazione si trova $-1 < t < \mathrm{e} - 1$ e quindi la soluzione massimale del problema di Cauchy proposto è

$$x(t) = \frac{1}{(t+1)\left[1 - \log(t+1)\right]}, \qquad -1 < t < \mathrm{e} - 1.$$