Cognome				
Nome				
Matricola				
Laurea	Civ Amb	Gest	Inf Eln Tlc	Mec

Non scrivere qui

1	2	3	4	5

Università degli Studi di Parma
Dipartimento di Ingegneria e Architettura
Esame di Analisi Matematica 2 — Soluzioni
A.A. 2021-2022 — Parma, 2 Febbraio 2022

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore e mezza. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Sia $f(x,y) = x^2 - 2y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, e sia $\gamma\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^2$ una curva parametrica liscia tale che

$$\gamma(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad \gamma'(0) = \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Posto $\varphi(t) = f(\gamma(t))$, dove $t \in [-1,1]$, calcolate $\varphi'(0)$.

Soluzione. Essendo la curva γ liscia per ipotesi ed essendo la funzione f di classe C^∞ in $\mathbb{R}^2$, la funzione φ risulta essere di classe C^1 in $[-1,1]$ e quindi per la formula della derivata della funzione composta si ha

$$\varphi'(t) = \langle \nabla f(\gamma(t)) \,|\, \gamma'(t) \rangle, \qquad t \in [-1,1].$$

Per $t = 0$ risulta

$$\nabla f(\gamma(0)) = \nabla f(1,-1) = \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix}$$

da cui segue

$$\varphi'(0) = \langle \nabla f(\gamma(0)) \,|\, \gamma'(0) \rangle = \langle \begin{pmatrix} 2 \\ -2 \end{pmatrix} \,|\, \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \end{pmatrix} \rangle = 6 - 2 = 4.$$

Esercizio 2. Determinate per quali $\alpha \in \mathbb{R}$ tutte le soluzioni $x(t)$ dell'equazione differenziale

$$x''(t) - 2\alpha x'(t) + (\alpha^2 + 4)x(t) = 5$$

verificano $\lim\limits_{t \to +\infty} x(t) = 1$.

Soluzione. Le soluzioni dell'equazione caratteristica sono i numeri complessi coniugati $\lambda_\pm = \alpha \pm 2i$ e una soluzione dell'equazione completa è evidentemente data dalla funzione costante

$$x_p(t) = \frac{5}{\alpha^2 + 4}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione completa sono le funzioni

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^{\alpha t} \cos(2t) + C_2 \mathrm{e}^{\alpha t} \operatorname{sen}(2t) + \frac{5}{\alpha^2 + 4}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie. Affinché esista il limite di $x(t)$ per $t \to +\infty$ per ogni scelta delle costanti arbitrarie C_1 e C_2 deve evidentemente essere $\alpha < 0$ nel qual caso risulta

$$\lim_{t \to +\infty} x(t) = \frac{5}{\alpha^2 + 4}$$

da cui segue $\alpha = -1$.

Esercizio 3. Sia Γ la curva ottenuta come intersezione tra l'ellissoide di equazione $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ e il piano di equazione $x + y + z = 0$.

(a) Verificate che Γ è una curva ($1-$superficie) regolare e compatta in $\mathbb{R}^3$.

(b) Calcolate il massimo ed il minimo globale su Γ della funzione

$$f(x,y,z) = 2x + y, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Soluzione. (a) Sia $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ la funzione di componenti $\Phi = \big(\Phi^1, \Phi^2\big)$ definite da

$$\Phi^1(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + z^2 - 1 \qquad \text{e} \qquad \Phi^2(x,y,z) = x + y + z$$

per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ cosicché risulta $\Gamma = \Phi^{-1}(0,0)$. Si ha

$$D\Phi(x,y,z) = \begin{pmatrix} 2x & 4y & 2z \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

e risulta $\operatorname{rk} D\Phi(x,y,z) \le 1$ se e solo se tutti i minori di ordine due della matrice $D\Phi(x,y,z)$ sono nulli. Ciò accade nei punti di coordinate $(2y, y, 2y)$ al variare di $y \in \mathbb{R}$ e nessun punto siffatto giace sul piano di equazione $x + y + z = 0$ a meno che sia $y = 0$ cui corrisponde l'origine che non appartiene all'ellissoide di equazione $x^2 + 2y^2 + 2z^2 = 1$. Pertanto, Γ risulta essere una $1-$superficie regolare di $\mathbb{R}^3$. Inoltre, l'insieme Γ è evidentemente chiuso perché controimmagine di un punto mediante una funzione continua oltre che limitato.

(b) Essendo lineare, la funzione f è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^2$ e quindi ha minimo e massimo globale su Γ per il teorema di Weierstrass. Essendo Γ una curva regolare, gli estremi globali possono essere cercati con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Le corrispondenti equazioni sono

$$\begin{cases} 2 - 2\lambda x - \mu = 0 \\ 1 - 4\lambda y - \mu = 0 \\ -2\lambda z - \mu = 0 \end{cases}$$

cui vanno aggiunte le equazioni $x^2 + 2y^2 + z^2 = 1$ e $x + y + z = 0$ che definiscono Γ. Queste tre equazioni non hanno soluzioni per $\lambda = 0$ e quindi da esse segue

$$x = \frac{2-\mu}{2\lambda}; \qquad y = \frac{1-\mu}{4\lambda}; \qquad z = -\frac{\mu}{2\lambda}.$$

Sostituite queste espressioni di x, y e z nelle equazioni che definiscono Γ, si ottiene il sistema

$$\begin{cases} \dfrac{2-\mu}{2\lambda} + \dfrac{1-\mu}{4\lambda} - \dfrac{\mu}{2\lambda} = 0 \\ \dfrac{(2-\mu)^2}{4\lambda^2} + 2\dfrac{(1-\mu)^2}{16\lambda^2} + \dfrac{\mu^2}{4\lambda^2} = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} 5\dfrac{1-\mu}{4\lambda} = 0 \\ \dfrac{(2-\mu)^2}{4\lambda^2} + 2\dfrac{(1-\mu)^2}{16\lambda^2} + \dfrac{\mu^2}{4\lambda^2} = 1 \end{cases} \implies \begin{cases} \mu = 1 \\ \dfrac{1}{2\lambda^2} = 1 \end{cases}$$

che ha soluzione $\lambda = \pm 1/\sqrt{2}$ e $\mu = 1$ e da cui si ricavano i due punti di coordinate

$$P_\pm = \pm\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, 0, -\frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

Risulta infine

$$f(P_\pm) = \pm\frac{2}{\sqrt{2}} = \pm\sqrt{2}$$

e quindi P_+ e P_- risultano essere rispettivamente punto di maqssimo e minimo globale di f su Γ.

Esercizio 4. Sia

$$K = \Big\{(x, y, z) : -\sqrt{4 - x^2 - y^2} \le z \le 0 \text{ e } x \ge 0\Big\}.$$

(a) Descrivete e disegnate l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K xz \, d(x, y, z)$.

Soluzione. L'insieme K è la porzione della palla con centro nell'origine e raggio $R = 2$ contenuta nei semispazi $z \le 0$ e $x \ge 0$:

$$(x, y, z) \in K \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \le 4 \\ x \ge 0 \text{ e } z \le 0. \end{cases}$$

L'insieme K è compatto perché è evidentemente limitato ed è intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue e quindi è (Lebesgue) misurabile. La funzione f definita da

$$f(x, y, z) = xz, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

è un polinomio e quindi è integrabile in K.
Calcoliamo I utilizzando le coordinate sferiche. Si ha

$$\begin{aligned} \widetilde{K} &= \{(r, \vartheta, \varphi) \in [0, +\infty) \times [-\pi, \pi] \times [0, \pi] : (r \cos\vartheta \operatorname{sen}\varphi, r \operatorname{sen}\vartheta \operatorname{sen}\varphi, r\cos\varphi) \in K\} \\ &= [0, 2] \times [-\pi/2, \pi/2] \times [\pi/2, \pi] \end{aligned}$$

e quindi risulta

$$I = \int_K xz \, d(x, y, z) = \int_{[0,2]\times[-\pi/2,\pi/2]\times[\pi/2,\pi]} r^4 \cos\vartheta \cos\varphi \operatorname{sen}^2\varphi \, d(r, \vartheta, \varphi) =$$

da cui, utilizzando la formula di riduzione per fili, segue

$$\begin{aligned} &= \int_0^2 r^4 \, dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\vartheta \, d\varphi \int_{\pi/2}^{\pi} \cos\varphi \operatorname{sen}^2\varphi \, d\varphi = \\ &= \frac{1}{5} r^5 \Big|_0^2 \operatorname{sen}\vartheta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \frac{1}{3} \operatorname{sen}^3\varphi \Big|_{\pi/2}^{\pi} = \frac{32}{5} \cdot 2 \cdot \left(-\frac{1}{3}\right) = -\frac{64}{15}. \end{aligned}$$

Alternativamente si può integrare per fili. In tal caso, la proiezione di K sul piano xy è la porzione di cerchio

$$\pi_{xy}(K) = \big\{(x, y) : x^2 + y^2 \le 2 \text{ e } x \ge 0\big\}$$

e per ogni $(x, y) \in \pi_{xy}(K)$ la corrispondente sezione è l'intervallo

$$K_{(x,y)} = \Big[-\sqrt{4 - (x^2 + y^2)}, 0\Big], \qquad (x, y) \in \pi_{xy}(K).$$

Per la formula di riduzione si ha allora

$$\begin{aligned} I = \int_K xz \, d(x, y, z) &= \int_{\pi_{xy}(K)} \left(\int_{-\sqrt{4-(x^2+y^2)}}^{0} xz \, dz \right) d(x, y) = \\ &= \int_{\pi_{xy}(K)} -\frac{1}{2} x \left[4 - (x^2 + y^2)\right] \, d(x, y) \end{aligned}$$

e, utilizzando coordinate polari nel piano abbinate nuovamente alla formula di riduzione, risulta

$$I = -\frac{1}{2} \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\vartheta \, d\vartheta \left(\int_0^2 r^2 \left(4 - r^2\right) \, dr \right) = -\frac{1}{2} \operatorname{sen}\vartheta \Big|_{-\pi/2}^{\pi/2} \left(\frac{4}{3} r^3 - \frac{1}{5} r^5 \right) \Big|_0^2 = \ldots = -\frac{64}{15}.$$

Esercizio 5. Determinate la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) = -tx(t) - \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{t^2-t}[x(t)]^3 \\ x(0) = \dfrac{1}{\sqrt{\mathrm{e}-1}}. \end{cases}$$

Soluzione. La funzione a secondo membro è

$$f(t,x) = -tx - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{t^2-t}x^3, \qquad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R},$$

ed è di classe $f \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Conseguentemente, il problema di Cauchy considerato ha soluzione massimale $x \in C^\infty(\alpha,\beta)$ con $-\infty \le \alpha = \alpha(x_0) < 0 < \beta = \beta(x_0) \le +\infty$. Tale soluzione è prolungamento di ogni altra soluzione del medesimo problema di Cauchy.
Poiché la soluzione del medesimo problema di Cauchy con dato iniziale $x_0 = 0$ è la funzione identicamente nulla $x(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, la soluzione massimale del problema di Cauchy considerato verifica la condizione $x(t) > 0$ per ogni $t \in (\alpha,\beta)$. La funzione

$$y(t) = [x(t)]^\lambda, \qquad t \in (\alpha,\beta),$$

con $\lambda \neq 0$ da determinare è di classe $C^\infty(\alpha,\beta)$ e, essendo $x(t)$ soluzione del problema di Cauchy considerato con $x(t) > 0$ per ogni $t \in (\alpha,\beta)$, risulta

$$y'(t) = \lambda[x(t)]^{\lambda-1}x'(t) = \lambda[x(t)]^{\lambda-1}\left(-tx(t) - \frac{1}{2}\mathrm{e}^{t^2-t}[x(t)]^3\right) = -\lambda t y(t) - \frac{\lambda}{2}\mathrm{e}^{t^2-t}\lambda[x(t)]^{\lambda+2}$$

con $y(t) > 0$ per ogni $t \in (\alpha,\beta)$. Scegliendo $\lambda = -2$, la funzione $y(t)$ per $t \in (\alpha,\beta)$ risulta essere soluzione positiva del problema di Cauchy

$$\begin{cases} z'(t) = 2tz(t) + \mathrm{e}^{t^2-t} \\ z(0) = \mathrm{e} - 1. \end{cases}$$

La soluzione di tale problema è

$$z(t) = \mathrm{e}^{t^2}\left\{(\mathrm{e}-1) + \int_0^t \mathrm{e}^{s^2-s}\mathrm{e}^{-s^2}\,ds\right\} = \mathrm{e}^{t^2+1}\left(1 - \frac{1}{\mathrm{e}^{t+1}}\right), \qquad t \in \mathbb{R},$$

e quindi $y(t)$ coincide con $z(t)$ sull'intervallo aperto (α,β) contenente l'origine in cui risulta $z(t) > 0$. Risolvendo tale disequazione si trova $t > -1$ e quindi la soluzione massimale del problema di Cauchy proposto è

$$x(t) = \frac{1}{\sqrt{\mathrm{e}^{t^2+1}\left(1 - \mathrm{e}^{-(t+1)}\right)}}, \qquad t > -1.$$