Cognome	________________			
Nome	________________			
Matricola				
Laurea	Civ Amb	Gest	Inf Eln Tlc	Mec

Non scrivere qui

1	2	3	4	5

Università degli Studi di Parma

Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Esame di Analisi Matematica 2 — Soluzioni

A.A. 2021-2022 — Parma, 14 Gennaio 2022

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Calcolate la lunghezza $L(\gamma)$ della curva parametrica $\gamma\colon [0, \sqrt[4]{6}] \to \mathbb{R}^2$ definita da

$$\gamma(t) = \frac{t^4}{4}e_1 + \frac{t^6}{3}e_2, \qquad 0 \le t \le \sqrt[4]{6}.$$

Soluzione. La curva γ è liscia e quindi è rettificabile. Si ha

$$\gamma'(t) = t^3 e_1 + 2t^5 e_2, \qquad 0 \le t \le \sqrt[4]{6}.$$

da cui segue

$$L(\gamma) = \int_0^{\sqrt[4]{6}} \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_0^{\sqrt[4]{6}} t^3\sqrt{1+4t^4}\, dt = $$
$$= \frac{1}{4}\int_0^6 \sqrt{1+4s}\, ds = \frac{1}{24}(1+4s)^{3/2}\Big|_0^6 = \frac{125-1}{24} = \frac{31}{6}.$$

Esercizio 2. Scrivete l'equazione del piano tangente al grafico della funzione

$$f(x,y) = x^2 y \mathrm{e}^{x^3+y^4}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

nel punto $P = (-1,1)$.

Soluzione. La funzione f è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^2$ e l'equazione del piano tangente al grafico di f in P è

$$z = f(-1,1) + f_x(-1,1)(x+1) + f_y(-1,1)(y-1).$$

Si ha $f(-1,1) = 1$ e le derivate parziali di f sono

$$f_x(x,y) = \left(2xy + 3x^4y\right)\mathrm{e}^{x^3+y^4} \qquad \text{e} \qquad f_y(2,1) = \left(x^2 + 4x^2y^4\right)\mathrm{e}^{x^3+y^4}$$

per ogni (x,y) da cui segue $f_x(-1,1) = 1$ e $f_y(-1,1) = 5$. Sostituendo nell'equazione del piano tangente risulta

$$x + 5y - z = 3.$$

Esercizio 3. Sia Γ la curva ottenuta come intersezione tra il cilindro ellittico di equazione $x^2+4y^2=1$ e il piano di equazione $x+y+z=0$.

(a) Verificate che Γ è una curva ($1-$superficie) regolare e compatta in $\mathbb{R}^3$.

(b) Calcolate il massimo ed il minimo globale su Γ della funzione

$$f(x,y,z)=x^2/2+2y^2-z^2, \qquad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3.$$

Soluzione. (a) Sia $\Phi\in C^\infty(\mathbb{R}^3,\mathbb{R}^2)$ la funzione di componenti $\Phi=\big(\Phi^1,\Phi^2\big)$ definite da

$$\Phi^1(x,y,z)=x^2+4y^2-1 \qquad \text{e} \qquad \Phi^2(x,y,z)=x+y+z$$

per ogni $(x,y,z)\in\mathbb{R}^3$ cosicché risulta $\Gamma=\Phi^{-1}(0,0)$. Si ha

$$D\Phi(x,y,z)=\begin{pmatrix}2x & 8y & 0\\ 1 & 1 & 1\end{pmatrix}, \qquad (x,y,z)\in\mathbb{R}^3,$$

e risulta $\operatorname{rk} D\Phi(x,y,z)\le 1$ se e solo se tutti i minori di ordine due della matrice $D\Phi(x,y,z)$ sono nulli. Ciò accade per $x=y=0$ e nessun punto con $x=y=0$ appartiene a Γ. Pertanto, Γ risulta essere una $1-$superficie regolare di $\mathbb{R}^3$. Inoltre, l'insieme Γ è evidentemente chiuso perché controimmagine di un punto mediante una funzione continua ed è anche limitato:

$$(x,y,z)\in\Gamma \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases}x^2+4^2=1\\ x+y+z=0\end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad |x|\le 1,\ |y|\le 1/2 \text{ e } |z|\le 3/2.$$

(b) Essendo un polinomio, la funzione f è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^2$ e quindi ha minimo e massimo globale su Γ per il teorema di Weierstrass. Essendo Γ una curva regolare, gli estremi globali possono essere cercati con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Le corrispondenti equazioni sono

$$\begin{cases}x-2\lambda x-\mu=0\\ 4y-8\lambda y-\mu=0\\ -2z-\mu=0\end{cases}$$

cui vanno aggiunte le equazioni $x^2+4y^2=1$ e $x+y+z=0$ che definiscono Γ. Da $\mu=-2z$ e $z=-(x+y)$ segue $\mu=2(x+y)$ che, sostituito nelle rimanenti equazioni conduce al sistema

$$\begin{cases}(2\lambda+1)x+2y=0\\ x+(4\lambda-1)y=0\end{cases}$$

che ha soluzioni diverse da $x=y=0$ soltanto se risulta

$$\det\begin{pmatrix}2\lambda & 2\\ 1 & 4\lambda-1\end{pmatrix}=(2\lambda+1)(4\lambda-1)-2=8\lambda^2+2\lambda-3=0$$

e ciò accade per $\lambda_1=1/2$ e $\lambda_2=-3/4$.
Per $\lambda_1=1/2$, dalla prima equazione si ricava $y=-x$ che, sostituito nella rimanente equazione $x^2+4y^2=1$, dà $x=\pm1/\sqrt{5}$ e $y=\mp1/\sqrt{5}$ cui corrispondono i due punti di coordinate

$$P_\pm=(\pm1/\sqrt{5},\mp1/\sqrt{5},0).$$

Se invece $\lambda_1=-3/4$, dalla prima equazione si ricava $y=x/4$ che, sostituito nella rimanente equazione $x^2+4y^2=1$, dà $x=\pm2/\sqrt{5}$ e $y=\mp1/(2\sqrt{5})$ cui corrispondono i due punti di coordinate

$$Q_\pm=(\pm2/\sqrt{5},\pm1/(2\sqrt{5}),\mp\sqrt{5}/2).$$

Risulta $f(P_\pm)=1/2$ e $f(Q_\pm)=-3/4$ da cui segue che i punti $P_\pm$ sono punti di massimo globale di f su Γ mentre i punti $Q_\pm$ sono punti di minimo globale di f su Γ.

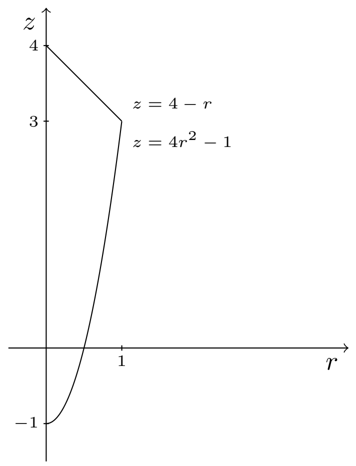
Esercizio 4. Sia

$$K = \left\{(x,y,z): \ 4x^2+4y^2-1 \le z \le 4-\sqrt{x^2+y^2} \text{ e } 0 \le x \le \sqrt{3}y \le 3x\right\}.$$

(a) Descrivete e disegnate l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K xy \, d(x,y,z)$.

Soluzione. L'insieme K è l'intersezione della parte del poliedro definito dai piani $y = x/\sqrt{3}$ e $y = \sqrt{3}x$ contenuta nel semispazio $x \ge 0$ con il solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la figura contenuta nel primo quadrante del piano rz (con $r = \sqrt{x^2+y^2}$) ottenuta compresa tra l'asse z e i grafici di $z = 4r^2-1$ e $z = 4-r$ per $0 \le r \le 1$ come illustrato nella figura seguente.



L'insieme K è compatto perché è limitato ed è intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue e quindi è (Lebesgue) misurabile. La funzione f definita da

$$f(x,y,z) = xy \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

è è un polinomio e quindi è integrabile in K.
Calcoliamo I mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione di K sul piano xy è la porzione di cerchio

$$\pi_{xy}(K) = \left\{(x,y): \ x^2+y^2 \le 1 \text{ e } x/\sqrt{3} \le y \le \sqrt{3}x\right\}$$

e per ogni $(x,y) \in \pi_{xy}(K)$ la corrispondente sezione è l'intervallo

$$K_{(x,y)} = \left[4(x^2+y^2)-1, 4-\sqrt{x^2+y^2}\right], \qquad (x,y) \in \pi_{xy}(K).$$

Per la formula di riduzione si ha allora

$$\begin{aligned} I = \int_K xy \, d(x,y,z) &= \int_{\pi_{xy}(K)} \left(\int_{4(x^2+y^2)-1}^{4-\sqrt{x^2+y^2}} xy \, dz \right) d(x,y) = \\ &= \int_{\pi_{xy}(K)} xy \left[5 - \sqrt{x^2+y^2} - 4\left(x^2+y^2\right)\right] d(x,y) \end{aligned}$$

e, utilizzando coordinate polari nel piano abbinate nuovamente alla formula di riduzione, risulta

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/6}^{\pi/3} \operatorname{sen}\theta \cos\theta \, d\theta \left(\int_0^1 r^3 \left(5 - r - 4r^2\right) dr \right) = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2\theta \Big|_{\pi/6}^{\pi/3} \left\{ \left(\frac{5}{4}r^4 - \frac{1}{5}r^5 - \frac{2}{3}r^6 \right) \Big|_0^1 \right\} = \frac{1}{4} \left(\frac{5}{4} - \frac{1}{5} - \frac{2}{3} \right) = \frac{23}{240}. \end{aligned}$$

Esercizio 5. Data l'equazione differenziale

$$x''(t) - 4x'(t) + 3x(t) = \mathrm{e}^t \operatorname{sen} t,$$

determinate

(a) tutte le soluzioni dell'equazione differenziale;

(b) la soluzione del problema di Cauchy con $x(0) = 0$ e $x'(0) = 1$.

Soluzione. (a) L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 4\lambda + 3 = 0$ le cui soluzioni reali e distinte sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_2 = 3$. Quindi, le funzioni

$$x_1(t) = \mathrm{e}^t; \qquad x_2(t) = \mathrm{e}^{3t};$$

con $t \in \mathbb{R}$ sono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^t + C_2\mathrm{e}^{3t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
Poiché il termine non omogeneo dell'equazione è prodotto di una funzione esponenziale e di una funzione trigonometrica, cerchiamo una soluzione dell'equazione completa della forma

$$x_p(t) = A\mathrm{e}^t \cos t + B\mathrm{e}^t \operatorname{sen} t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $A, B \in \mathbb{R}$ costanti da determinare. Si ha allora

$$x_p''(t) - 4x_p'(t) + 3x_p(t) = -(A + 2B)\mathrm{e}^t \cos t + (2A - B)\mathrm{e}^t \operatorname{sen} t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

da cui segue $A = 2/5$ e $B = -1/5$.
Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione completa sono le funzioni

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^t + C_2\mathrm{e}^{3t} + \frac{1}{5}(2\cos t - \operatorname{sen} t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
Alternativamente, anche se i calcoli non sono più brevi, è possibile procedere anche con il metodo di variazione delle costanti arbitrarie di Lagrange. Si cerca una soluzione dell'equazione completa della forma

$$x_p(t) = c_1(t)\mathrm{e}^t + c_2(t)\mathrm{e}^{3t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con c_1 e c_2 funzioni di classe C^1 in $\mathbb{R}$ tali che

$$\begin{cases} c_1'(t)\mathrm{e}^t + c_2'(t)\mathrm{e}^{3t} = 0 \\ c_1'(t)\mathrm{e}^t + 3c_2'(t)\mathrm{e}^{3t} = \mathrm{e}^t \operatorname{sen} t \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \begin{cases} c_1'(t) = -\dfrac{1}{2} \operatorname{sen} t \\ c_2'(t) = \dfrac{1}{2}\mathrm{e}^{-2t} \operatorname{sen} t. \end{cases}$$

Integrando si trova

$$c_1(t) = \frac{1}{2}\cos t \qquad \text{e} \qquad c_2(t) = -\frac{1}{10}\mathrm{e}^{-2t}\cos t - \frac{1}{5}\mathrm{e}^{-2t} \operatorname{sen} t$$

per ogni t da cui si riottiene la soluzione $x_p(t)$ già trovata.
(b) Scegliamo le costanti $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ in modo che per la soluzione $x(t)$ definita in (a) risulti $x(0) = 0$ e $x'(0) = 1$. Si ha

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + C_2 + 2/5 = 0 \\ x'(0) = C_1 + 3C_2 + 1/5 = 1 \end{cases}$$

da cui segue $C_1 = -1$ e $C_2 = 3/5$. La soluzione cercata è dunque la funzione

$$x(t) = \frac{1}{5}(2\cos t - \operatorname{sen} t - 5) + \frac{3}{5}\mathrm{e}^{3t}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$