COGNOME	____________________	NON SCRIVERE QUI	
NOME	____________________	1 2 3 4	
MATRICOLA	__________		
LAUREA	CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC		

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI

A.A. 2020-2021 — PARMA, 15 SETTEMBRE 2021

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore e mezza. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ il campo vettoriale di componenti $f = (f^1, f^2)$ definite da

$$f^1(x, y) = (a + xy)e^{xy} + 2xy^2; \qquad f^2(x, y) = x^2e^{xy} + 2x^2y - b;$$

per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

(a) Determinate $a \in \mathbb{R}$ in modo che il campo sia conservativo.

(b) Per a come sopra, determinate $b \in \mathbb{R}$ in modo che l'integrale curvilineo del campo f lungo l'arco di cardiode di equazione polare $\rho(\theta) = 1 + \cos\theta$, $0 \le \theta \le \pi/2$, sia uguale a 2.

Soluzione. (a) Poiché f è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^2$ che è un aperto convesso, il campo vettoriale è conservativo se e solo se è irrotazionale. Le derivate in croce di f sono date da

$$f^1_y(x, y) = xe^{xy} + x(a + xy)e^{xy} + 4xy \qquad \text{e} \qquad f^2_x(x, y) = 2xe^{xy} + x^2ye^{xy} + 4xy$$

per ogni (x, y) e quindi il campo risulta irrotazionale in $\mathbb{R}^2$ se e solo si ha

$$(1 + a)x = 2x \qquad \Longleftrightarrow \qquad a = 1.$$

Pertanto, il campo è conservativo se e solo se $a = 1$, indipendentemente dal valore di b.

(b) Per $a = 1$, un potenziale di f è evidentemente dato da

$$F(x) = xe^{xy} + x^2y^2 - by, \qquad (x, y) \in \mathbb{R}^2.$$

Poiché gli estremi di γ sono i punti di coordinate $\gamma(0) = (2, 0)$ e $\gamma(\pi/2) = (0, 1)$, l'integrale curvilineo di f lungo γ è

$$\int_\gamma f \cdot dl = F(0, 1) - F(2, 0) = -b - 2$$

e dunque risulta uguale a 2 per $b = -4$.

Alternativamente, essendo il campo f conservativo per $a = 1$, è possibile calcolare l'integrale curvilineo di f lungo la curva parametrica ottenuta come incollamento delle curve parametriche semplici i cui sostegni sono il segmento di estremi $(2, 0)$ e $(0, 0)$ e il segmento di estremi $(0, 0)$ e $(0, 1)$. Si ha allora

$$\int_\gamma f \cdot dl = \int_0^2 (-1)\, dt + \int_0^1 (-b)\, dt = -2 - b$$

da cui si ricava $b = -4$ come prima.

Esercizio 2. Sia Γ la curva ottenuta come intersezione tra il cono di equazione $z = \sqrt{x^2 + y^2}$ e il piano di equazione $3x + 4y + z = 1$.

(a) Verificate che Γ è una curva ($1-$superficie) regolare in $\mathbb{R}^3$.

(b) Calcolate la distanza di Γ dall'asse z.

Soluzione. (a) Sia γ_z l'asse z e sia $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^3 \setminus \gamma_z, \mathbb{R}^2)$ la funzione di componenti $\Phi = \big(\Phi^1, \Phi^2\big)$ definite da

$$\Phi^1(x, y, z) = \sqrt{x^2 + y^2} - z \qquad \text{e} \qquad \Phi^2(x, y, z) = 3x + 4y + z - 1$$

per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \gamma_z$ cosicché risulta $\Gamma = \Phi^{-1}(0, 0)$. Si ha

$$D\Phi(x, y, z) = \begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \gamma_z$$

e quindi risulta $\operatorname{rk} D\Phi(x, y, z) \leq 1$ se e solo se tutti i minori di ordine due della matrice $D\Phi(x, y, z)$ sono nulli ovvero si ha

$$\begin{cases} 4x - 3y = 0 \\ \dfrac{x}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 3 = 0 \\ \dfrac{y}{\sqrt{x^2 + y^2}} + 4 = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} x^2 + y^2 > 0 \\ x = -3\sqrt{x^2 + y^2} \\ y = -4\sqrt{x^2 + y^2} \end{cases}$$

Il sistema che compare a destra non ha soluzioni e quindi Γ risulta essere una $1-$superficie regolare di $\mathbb{R}^3$. Inoltre, l'insieme Γ è evidentemente chiuso e anche illimitato. Infatti, utilizzando coordinate cilindriche, si ricava che la proiezione di Γ sul piano xy è l'insieme

$$\pi_{xy}(\Gamma) = \big\{(r\cos\theta, r\operatorname{sen}\theta) :\ r(3\cos\theta + 4\operatorname{sen}\theta + 1) = 1\big\}$$

che è evidentemente illimitato.

(b) La distanza d di Γ dall'asse z è il minimo della funzione $(x, y, z) \mapsto \sqrt{x^2 + y^2}$ su Γ che coincide su Γ con la funzione $(x, y, z) \mapsto z$. Entrambe le funzioni tendono a $+\infty$ per $(x, y, z) \to \infty$ e $(x, y, z) \in \Gamma$ e quindi hanno minimo globale su Γ per il teorema di Weierstrass generalizzato. Essendo Γ una curva regolare, il minimo può essere ricercato con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Imponiamo a tal fine che il gradiente di $(x, y, z) \mapsto z$ sia combinazione lineare dei gradienti delle componenti di Φ. Deve allora essere

$$\det\begin{pmatrix} \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & 1 \\ \frac{x}{\sqrt{x^2+y^2}} & \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} & -1 \\ 3 & 4 & 1 \end{pmatrix} = \frac{4x - 3y}{\sqrt{x^2 + y^2}} = 0$$

cui vanno aggiunte le condizioni $(x, y, z) \in \Gamma$. Da queste equazioni segue che deve essere $y = 4x/3$ e $z = 5|x|/3$ e, imponendo che tale punto sia su Γ, si trova il punto di coordinate $P = (1/10, 2/15, 1/6)$ che è quindi il punto di minimo cercato. In tale punto si ha $d = 1/6$ che è la distanza cercata.
Alternativamente, anche se è un po' più laborioso, si può risolvere il sistema dei moltiplicatori di Lagrange formato dalle equazioni

$$\frac{(1-\lambda)x}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 3\mu = 0; \qquad \frac{(1-\lambda)y}{\sqrt{x^2 + y^2}} - 4\mu = 0; \qquad \lambda = \mu;$$

cui vanno aggiunte le condizioni $(x, y, z) \in \Gamma$ oppure si può osservare che il minimo globale di $(x, y, z) \mapsto z$ su Γ può essere determinato in coordinate cilindriche calcolando il minimo della funzione

$$\rho(\theta) = \frac{1}{3\cos\theta + 4\operatorname{sen}\theta + 1}, \qquad \theta \in D,$$

nell'insieme D dei $\theta \in [0, 2\pi]$ in cui il denominatore è positivo.

Esercizio 3. Sia
$$K = \left\{(x\,,y\,,z)\,:\; x^2+y^2 \le z \le 2-x \text{ e } x\,,y \ge 0\right\}.$$

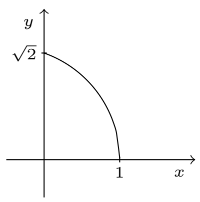
(a) Descrivete l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K y\, d(x\,,y\,,z)$.

Soluzione. L'insieme K è la porzione di spazio compresa tra la superficie del paraboloide di equazione $z = x^2+y^2$ e il piano di equazione $z = 2-x$ e contenuta nell'intersezione dei semispazi $x \ge 0$ e $y \ge 0$.
L'insieme K è chiuso perché è intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue (polinomi) ed è limitato poiché risulta

$$(x\,,y\,,z)\in K \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} x^2+y^2 \le 2-x \\ x\,,y \ge 0 \\ 0 \le z \le 2 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} (x+1/2)^2+y^2 \le 9/4 \\ x\,,y \ge 0 \\ 0 \le z \le 2 \end{cases} \quad\Longrightarrow\quad \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ 0 \le y \le 3/2 \\ 0 \le z \le 2. \end{cases}$$

L'insieme K è dunque compatto e quindi è (Lebesgue) misurabile. La funzione $f(x\,,y\,,z) = y$, $(x\,,y\,,z)\in\mathbb{R}^3$ è lineare e quindi è integrabile in K.
Calcoliamo I mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione di K sul piano xy è la parte del cerchio di equazione
$$(x+1/2)^2+y^2 \le 9/4$$
contenuta nel primo quadrante e quindi è l'insieme
$$\pi_{xy}(K) = \left\{(x\,,y)\,:\; 0 \le y \le \sqrt{2-x-x^2} \text{ e } 0 \le x \le 1\right\}$$
che è rappresentato nella figura seguente.



Per ogni $(x\,,y)\in\pi_{xy}(K)$, la corrispondente sezione è l'intervallo
$$K_{(x,y)} = \left[x^2+y^2, 2-x\right], \qquad (x\,,y)\in\pi_{xy}(K).$$

Per la formula di riduzione (due volte) si ha allora
$$\begin{aligned} I = \int_{\pi_{xy}(K)} \left(\int_{x^2+y^2}^{2-x} y\,dz\right) d(x\,,y) &= \int_{\pi_{xy}(K)} y\left[\left(2-x-x^2\right)-y^2\right]\, d(x\,,y) = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{\sqrt{2-x-x^2}} y\left[\left(2-x-x^2\right)-y^2\right]\, dy\right) dx = \\ &= \int_0^1 \left(\int_0^{2-x-x^2} \frac{1}{2}\left[\left(2-x-x^2\right)-u\right]\, du\right) dx = \\ &= \int_0^1 -\frac{1}{4}\left[\left(2-x-x^2\right)-u\right]\Big|_0^{2-x-x^2} dx = \\ &= \frac{1}{4}\int_0^1 \left(2-x-x^2\right)^2 dx = \ldots = \frac{17}{40}. \end{aligned}$$

Esercizio 4. Data l'equazione differenziale

$$x''(t) - 2x'(t) + 5x(t) = 17\cos(2t)$$

determinate

(a) tutte le soluzioni dell'equazione differenziale;

(b) la soluzione del problema di Cauchy con $x(0) = x'(0) = 0$;

(c) per quali valori iniziali $x(0)$ e $x'(0)$ la soluzione $x(t)$ dell'equazione differenziale è limitata.

Soluzione. (a) L'equazione proposta è un'equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 2\lambda + 5 = 0$ le cui soluzioni complesse e coniugate sono $\lambda_\pm = 1 \pm 2i$. Quindi, le funzioni

$$x_1(t) = \mathrm{e}^t \cos(2t); \qquad x_2(t) = \mathrm{e}^t \operatorname{sen}(2t);$$

con $t \in \mathbb{R}$ sono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^t \cos(2t) + C_2 \mathrm{e}^t \operatorname{sen}(2t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
Poiché il termine non omogeneo dell'equazione è una funzione trigonometrica, cerchiamo una soluzione dell'equazione completa della forma

$$x_p(t) = A\cos(2t) + B\operatorname{sen}(2t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $A, B \in \mathbb{R}$ costanti da determinare. Si ha allora

$$x_p''(t) - 2x_p'(t) + 5x_p(t) = (A - 4B)\cos(2t) + (4A + B)\operatorname{sen}(2t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

da cui segue $A = 1$ e $B = -4$.
Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione completa sono le funzioni

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^t \cos(2t) + C_2 \mathrm{e}^t \operatorname{sen}(2t) + \cos(2t) - 4\operatorname{sen}(2t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
(b) Scegliamo le costanti $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ in modo che la soluzione $x(t)$ definita in (a) sia tale che $x(0) = x'(0) = 0$. Si ha

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + 1 = 0 \\ x'(0) = C_1 + 2C_2 - 8 = 0 \end{cases}$$

da cui segue $C_1 = -1$ e $C_2 = 9/2$. La soluzione cercata è dunque la funzione

$$x(t) = -\mathrm{e}^t \cos(2t) + \frac{9}{2}\mathrm{e}^t \operatorname{sen}(2t) + \cos(2t - 4\operatorname{sen}(2t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(c) La soluzione

$$x(t) = C_1 \mathrm{e}^t \cos(2t) + C_2 \mathrm{e}^t \operatorname{sen}(2t) + \cos(2t) - 4\operatorname{sen}(2t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

è limitata se e solo se risulta $C_1 = C_2 = 0$ che corisponde ai valori iniziali $x(0) = 1$ e $x'(0) = -8$.