Cognome ________________	Non scrivere qui
Nome ________________	1 2 3 4
Matricola	
Laurea Civ Amb Gest Inf Eln Tlc Mec	

Università degli Studi di Parma

Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Esame di Analisi Matematica 2 — Soluzioni

A.A. 2020-2021 — Parma, 1 Luglio 2021

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore e mezza. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ il campo vettoriale di componenti $f = (f^1, f^2, f^3)$ definite da

$$\begin{cases} f^1(x,y,z) = \operatorname{sen}(yz^2) - 2xyz \operatorname{sen}(x^2z) \\ f^2(x,y,z) = \cos(x^2z) + xz^2\cos(yz^2) \\ f^3(x,y,z) = -x^2y\operatorname{sen}(x^2z) + 2xyz\cos(yz^2) \end{cases} \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Stabilite se f è conservativo.

(b) Calcolate l'integrale curvilineo di f lungo l'arco parametrico $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ definito da

$$\gamma(t) = \sqrt{\frac{\pi}{3}}t^2 e_1 + \frac{(\pi-6)t+6}{6}e_2 + t^4 e_3, \qquad t \in [0,1].$$

Soluzione. (a) Poiché f è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^3$ che è un aperto convesso, il campo vettoriale è conservativo se e solo se è irrotazionale. Poiché le derivate in croce di f sono date da

$$f^1_y(x,y,z) = z^2\cos(yz^2) - 2xz\operatorname{sen}(x^2z) = f^2_x(x,y,z);$$
$$f^2_z(x,y,z) = -x^2\operatorname{sen}(x^2z) + 2xz\cos(yz^2) - 2xyz^3\operatorname{sen}(yz^2) = f^3_y(x,y,z);$$
$$f^1_z(x,y,z) = 2yz\cos(yz^2) - 2xy\operatorname{sen}(x^2z) - 2x^3yz\cos(x^2z),$$

il campo risulta irrotazionale in $\mathbb{R}^3$ e quindi conservativo. Un potenziale di f è dato da

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= \int_0^x f^1(t,0,0)\,dt + \int_0^y f^2(x,t,0)\,dt + \int_0^z f^3(x,y,t)\,dt = \\ &= 0 + \int_0^y 1\,dt + 2\int_0^z \left[-x^2y\operatorname{sen}(x^2t) + 2xyt\cos(yt^2)\right]\,dt = \\ &= y + y\cos(x^2t)\Big|_0^z + x\operatorname{sen}(yt^2)\Big|_0^z = \\ &= y + y\cos(x^2z) - y + x\operatorname{sen}(yz^2) = y\cos(x^2z) + x\operatorname{sen}(yz^2) \end{aligned}$$

per ogni (x,y,z).

(b) Gli estremi di γ sono $\gamma(0) = (0,1,0)$ e $\gamma(1) = (\sqrt{\pi/3}, \pi/6, 1)$ e quindi l'integrale curvilineo di f lungo γ è

$$\begin{aligned} \int_\gamma f\cdot dl &= F(\sqrt{\pi/3}, \pi/6, 1) - F(0,1,0) = \\ &= \frac{\pi}{6}\cos\frac{\pi}{3} + \sqrt{\frac{\pi}{3}}\operatorname{sen}\frac{\pi}{6} - 1 = \frac{\pi}{6}\frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\pi}{3}}\frac{1}{2} - 1 = \frac{\pi}{12} + \frac{\sqrt{3\pi}}{6} - 1. \end{aligned}$$

Esercizio 2. Sia

$$\Gamma = \left\{(x\,,y):\ x^2+y^6=20\right\}.$$

(a) Provate che Γ è una curva regolare ($1-$superficie) e compatta in $\mathbb{R}^2$.

(b) Calcolate il minimo e il massimo globale di $f(x\,,y)=x^2y^4$, $(x\,,y)\in\mathbb{R}^2$ su Γ.

Soluzione. (a) Si ha $\Gamma=\{p=0\}$ ove p è il polinomio definito da

$$p(x\,,y)=x^2+y^6-20, \qquad (x\,,y)\in\mathbb{R}^2.$$

Il gradiente di p si annulla solo nell'origine $(0\,,0)$ che non appartiene a Γ e da ciò segue che Γ è una curva ($1-$superficie) regolare di $\mathbb{R}^2$. Inoltre, l'insieme Γ è chiuso perché controimmagine di un punto mediante p ed è anche limitato poiché risulta

$$(x\,,y)\in\Gamma \quad\Longrightarrow\quad |x|\le\sqrt{2} \text{ e } |y|\le\sqrt[6]{20}.$$

(b) Essendo Γ un insieme compatto, gli estremi globali di f su Γ esistono per il teorema di Weierstrass. Inoltre, essendo $f\ge 0$ in $\mathbb{R}^2$ con $f=0$ sugli assi coordinati, il minimo globale di f su Γ è assunto nei punti di coordinate $\left(\pm 2\sqrt{5}\,,0\right)$ e $\left(0\,,\pm\sqrt[6]{20}\right)$. Poiché Γ è una curva regolare, il massimo globale di f su Γ può essere determinato con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Il sistema dei moltiplicatori di Lagrange è

$$\begin{cases} 2xy^4-2\lambda x=0\\ 4x^2y^3-6\lambda y^5=0\\ x^2+y^6=20 \end{cases} \qquad\Longleftrightarrow\qquad \begin{cases} x\left(y^4-\lambda\right)=0\\ y^3\left(2x^2-3\lambda y^2\right)=0\\ x^2+y^6=20. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava $x=0$ oppure $y=\sqrt[4]{\lambda}$ $(\lambda\ge 0)$. Se $x=0$, sostituendo nelle rimanenti equazioni risulta $\lambda=0$ e $y=\pm\sqrt[6]{20}$. Se invece si pone $y=\sqrt[4]{\lambda}$ $(\lambda\ge 0)$ nella prima equazione, per $\lambda=0$ si ritrovano i punti $\left(\pm 2\sqrt{5}\,,0\right)$ mentre per $\lambda>0$ la seconda equazione diviene

$$2x^2-3\lambda\sqrt{\lambda}=0 \qquad\Longrightarrow\qquad x=\pm\sqrt{\frac{3}{2}\lambda^{3/2}}$$

cosicché dalla terza segue

$$\frac{3}{2}\lambda^{3/2}+\lambda^{3/2}=20 \qquad\Longrightarrow\qquad \lambda=4.$$

Pertanto, gli estremi globali di f su Γ vanno ricercati tra i quattro punti

$$P_\pm=\left(0\,,\pm\sqrt[6]{20}\right) \qquad\text{e}\qquad Q_\pm=\left(\pm\sqrt{12}\,,\sqrt{2}\right).$$

Confrontando i valori assunti da f in tali punti

$$f(P_\pm)=\left(0\,,\pm\sqrt[6]{20}\right)=0 \qquad\text{e}\qquad f(Q_\pm)=\left(\pm\sqrt{12}\,,\sqrt{2}\right)=48$$

si conclude che il minimo e il massimo globali di f su Γ sono assunti in $P_\pm$ e in $Q_\pm$ rispettivamente.

Esercizio 3. Sia

$$K = \{(x, y, z) : \ 0 \le x \le 1 - y \text{ e } |z| \le 1 - (x^2 + y^2)\} .$$

(a) Descrivete e disegnate l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \int_K y \, d(x, y, z)$.

Soluzione. L'insieme K è l'intersezione del poliedro compreso tra i due piani $x = 0$ e $x = 1 - y$ con il solido di rotazione (trottola) che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z il triangolo di vertici $(0, -1)$, $(1, 0)$ e $(0, 1)$ contenuto nel semipiano rz (con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$).
L'insieme K è limitato poiché risulta

$$(x, y, z) \in K \qquad \Longrightarrow \qquad \sqrt{x^2 + y^2} \le 1 \text{ e } |z| \le 1$$

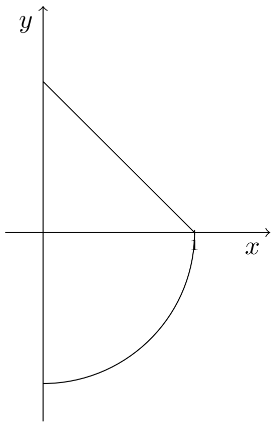
ed è intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue. Pertanto K è compatto e quindi (Lebesgue) misurabile e la funzione f definita da

$$f(x, y, z) = y \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

è lineare e quindi è (Lebesgue) integrabile in K.
Calcoliamo I mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione di K sul piano xy è l'insieme

$$\pi_{xy}(K) = \{(x, y) : \ x^2 + y^2 \le 1 \text{ e } 0 \le x \le 1 - y\}$$

illustrato nella figura seguente



e per ogni $(x, y) \in \pi_{xy}(K)$ la corrispondente sezione è l'intervallo

$$K_{(x,y)} = \left[-1 + (x^2 + y^2) \, , 1 - (x^2 + y^2)\right], \qquad (x, y) \in \pi_{xy}(K).$$

Per la formula di riduzione si ha allora

$$I = \int_{\pi_{xy}(K)} \left(\int_{-1+(x^2+y^2)}^{1-(x^2+y^2)} y \, dz \right) d(x, y) = \int_{\pi_{xy}(K)} 2y \left[1 - (x^2 + y^2)\right] \, d(x, y)$$

e quindi, utilizzando nuovamente la formula di riduzione, risulta

$$\begin{aligned} I = \int_{\pi_{xy}(K)} 2y \left[1 - (x^2 + y^2)\right] \, d(x, y) &= \int_0^1 \left(\int_{-\sqrt{x^2+y^2}}^{1-x} 2y \left[1 - (x^2 + y^2)\right] \, dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 \left\{ (1 - x^2) \, y^2 - \frac{1}{2} y^4 \right\} \Big|_{-\sqrt{1-x^2}}^{1-x} dx = \\ &= \int_0^1 \left\{ (1 - x^2) \, (1 - x)^2 - \frac{1}{2} \left(1 - x^2\right)^2 - \frac{1}{2} (1 - x)^4 \right\} dx = \\ &= \int_0^1 \left(-\frac{3}{2} x^4 + 2x^3 + x^2 - 2x + \frac{1}{2} \right) dx = \ldots = -\frac{1}{15}. \end{aligned}$$

Esercizio 4. Determinate la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x'(t) = (t+1)\big([x(t)]^2 - 1\big) \\ x(0) = 2. \end{cases}$$

Soluzione. L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili. La funzione a secondo membro è $f(t,x) = g(t)h(x)$ con

$$g(t) = t+1, \qquad t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad h(x) = x^2 - 1, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

Nell'intervallo $\mathbb{R}$ la funzione h è infinite volte derivabile e quindi il problema di Cauchy considerato ha soluzione massimale $x \in C^\infty(\alpha,\beta)$ con $-\infty \le \alpha < 0 < \beta \le +\infty$. Tale soluzione è prolungamento di ogni altra soluzione del medesimo problema di Cauchy.
Poiché la soluzione del medesimo problema di Cauchy con dato iniziale $x_0 = 1$ è la funzione identicamente nulla $x(t) = 1$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, la soluzione massimale del problema di Cauchy considerato verifica la condizione $x(t) > 1$ per ogni $t \in (\alpha,\beta)$. Ponendo

$$H(y) = \int_2^y \frac{1}{z^2-1}\,dz = \int_2^y \frac{1}{2}\left(\frac{1}{z-1} - \frac{1}{z+1}\right)dz = \frac{1}{2}\log\left(\frac{z-1}{z+1}\right)\Bigg|_2^y = \log\sqrt{\frac{y-1}{y+1}} + \log\sqrt{3}, \qquad y > 1,$$

si deduce che la funzione composta $H \circ x$ è in $C^\infty(\alpha,\beta)$ e verifica $(H\circ x)'(t) = t+1$ per $\alpha < t < \beta$ e $H \circ x(0) = 0$. Dunque, per il teorema fondamentale del calcolo, deve essere

$$(H\circ x)(t) = \frac{1}{2}\left[(t+1)^2 - 1\right], \qquad \alpha < t < \beta,$$

da cui segue con semplici calcoli

$$x(t) = \frac{3 + \mathrm{e}^{t^2+2t}}{3 - \mathrm{e}^{t^2+2t}}, \qquad \alpha < t < \beta.$$

Poiché si ha

$$\lim_{y\to 1^+} H(y) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{y\to+\infty} H(y) = \log\sqrt{3},$$

deve essere

$$\frac{1}{2}\left[(t+1)^2 - 1\right] < \log\sqrt{3} \qquad \Longleftrightarrow \qquad t^2 + 2t < \log 3$$

da cui segue

$$\alpha = -1 - \sqrt{1+\log 3} \qquad \text{e} \qquad \beta = -1 + \sqrt{1+\log 3}.$$

La soluzione massimale è dunque

$$x(t) = \frac{3 + \mathrm{e}^{t^2+2t}}{3 - \mathrm{e}^{t^2+2t}}, \qquad -1 - \sqrt{1+\log 3} < t < -1 + \sqrt{1+\log 3}.$$