COGNOME	______________________	NON SCRIVERE QUI
NOME	______________________	1 | 2 | 3 | 4
MATRICOLA	⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌋	
LAUREA	CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC	

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI

A.A. 2020-2021 — PARMA, 15 GIUGNO 2021

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore e mezza. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Sia $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^2$ la curva parametrica definita da

$$\gamma(t) = 4t^3 e_1 + 2\sqrt{t^9}e_2, \qquad 0 \le t \le 1.$$

(a) Calcolate la lunghezza $L(\gamma)$ della curva γ.

(b) Determinate $t_0 \in [0,1]$ in modo che la retta tangente a γ in $\gamma(t_0)$ sia parallela al vettore $v = (36,1)$.

(c) Trovate la funzione $f\colon [0,4] \to \mathbb{R}$ il cui grafico coincide con il sostegno γ^* di γ.

Soluzione. (a) La curva γ è liscia e quindi è rettificabile e si ha

$$L(\gamma) = \int_0^1 \|\gamma'(t)\|\,dt = \int_0^1 \sqrt{144t^4 + 81t^7}\,dt =$$
$$= \int_0^1 3t^2\sqrt{16+9t^3}\,dt = \int_0^1 \sqrt{16+9s}\,ds = \frac{2}{27}(16+9s)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{2}{27}(125-64) = \frac{122}{27}.$$

(b) Il vettore tangente a γ in $\gamma(t)$ è

$$\gamma'(t) = 12t^2 e_1 + 9\sqrt{t^7}e_2, \qquad 0 \le t \le 1.$$

Risulta quindi $\gamma'(t) \neq 0$ per ogni $0 < t \le 1$ e per tali t si ha

$$36 = \frac{12t^2}{9\sqrt{t^7}} \qquad \iff \qquad t^{3/2} = \frac{1}{27} \qquad \iff \qquad t = \frac{1}{9}$$

da cui segue $t_0 = 1/9$.
(c) Posto $x = 4t^3$, risulta $t = (x/4)^{1/3}$ con $0 \le x \le 4$. Sostituendo nella seconda componente risulta

$$y = 2t^{9/2}\Big|_{t=(x/4)^{1/3}} = \frac{x^{3/2}}{4}$$

e quindi la funzione cercata è

$$f(x,y) = \frac{x^{3/2}}{4}, \qquad 0 \le x \le 4.$$

Esercizio 2. Sia
$$f(x,y) = \big(x^2 - x\big)\cos y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Determinate i punti critici di f e stabilitene la natura.

(b) Determinate il minimo e il massimo globale di f su $K = [0,1] \times [\pi/2, 4]$.

Soluzione. (a) La funzione f è il prodotto di un polinomio in x per una funzione infinite volete derivabile della sola variabile y e quindi è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Le derivate parziali di f sono date da
$$f_x(x,y) = (2x-1)\cos y \qquad \text{e} \qquad f_y(x,y) = -\big(x^2 - x\big)\operatorname{sen} y$$
per ogni (x,y) e quindi i punti critici sono le soluzioni del sistema formato dalle equazioni
$$\begin{cases} (2x-1)\cos y = 0 \\ x(x-1)\operatorname{sen} y = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x = 1/2 \text{ o } y = \pi/2 + k\pi \text{ e } k \in \mathbb{Z} \\ x = 0 \text{ o } x = 1 \text{ o } y = k\pi \text{ e } k \in \mathbb{Z} \end{cases}$$
cui corrispondono i punti di coordinate
$$P_k = (1/2, k\pi); \qquad Q_k = (0, \pi/2 + k\pi); \qquad R_k = (1, \pi/2 + k\pi);$$
al variare di $k \in \mathbb{Z}$. la funzione f ha quindi infiniti punti critici.
La matrice hessiana di f è
$$D^2 f(x,y) = \begin{pmatrix} 2\cos y & -(2x-1)\operatorname{sen} y \\ -(2x-1)\operatorname{sen} y & -\big(x^2 - x\big)\cos y \end{pmatrix}$$
per ogni (x,y) da cui, ricordando che è
$$\cos(k\pi) = \operatorname{sen}(\pi/2 + k\pi) = (-1)^k \qquad \text{e} \qquad \cos(\pi/2 + k\pi) = \operatorname{sen}(k\pi) = 0$$
per ogni $k \in \mathbb{Z}$, segue
$$D^2 f(P_k) = \begin{pmatrix} 2(-1)^k & 0 \\ 0 & (-1)^k/4 \end{pmatrix}; \quad D^2 f(Q_k) = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^k \\ (-1)^k & 0 \end{pmatrix}; \quad D^2 f(R_k) = \begin{pmatrix} 0 & (-1)^{k+1} \\ (-1)^{k+1} & 0 \end{pmatrix};$$
per ogni k. Si ha
$$\det\big(D^2 f(P_k)\big) > 0 \qquad \text{e} \qquad \operatorname{tr}\big(D^2 f(P_k)\big) = \frac{9}{4}(-1)^k$$
per ogni k da cui segue che i punti P_k sono punti di minimo locale stretto per k pari e di massimo locale stretto per k dispari. Per i restanti punti Q_k e R_k si ha
$$\det\big(D^2 f(Q_k)\big) < 0 \qquad \text{e} \qquad \det\big(D^2 f(R_k)\big) < 0$$
per ogni k e quindi tali punti sono tutti punti di sella.
(b) Il rettangolo K è compatto e quindi la funzione f assume minimo e massimo globale su K per il teorema di Weierstrass. Si ha
$$(x,y) \in K \quad \Longrightarrow \quad \begin{cases} 0 \le x \le 1 \\ \pi/2 \le y \le 4 < 3\pi/2 \end{cases} \quad \Longrightarrow \quad x^2 - x \le 0 \text{ e } \cos y \le 0 \quad \Longrightarrow \quad f(x,y) \ge 0$$
e f si annulla sui tre segmenti che formano la base e i lati verticali del rettangolo K. Conseguentemente il minimo globale di f su K è assunto nei punti di tali lati ed è uguale a zero. Infine, la restrizione di f alla curva parametrica semplice il cui sostegno è il lato superiore di K è
$$\varphi(t) = f(t,4) = \big(t^2 - t\big)\cos 4, \qquad 0 \le t \le 1,$$
che assume valore massimo per $t = 1/2$. Si ha infine
$$f(1/2, \pi) = \frac{1}{4} > \frac{1}{4}\cos\pi = f(1/2, 4)$$
e quindi risulta
$$\min_K f = 0 \qquad \text{e} \qquad \max_K f = f(1/2, \pi) = \frac{1}{4}.$$

Esercizio 3. Sia

$$K = \left\{ (x\,,y\,,z) : \; |x| \le y \le 2, \; \sqrt{x^2+y^2} \ge 2 \text{ e } 0 \le z \le \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \right\}.$$

(a) Descrivete e disegnate l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \, d(x\,,y\,,z)$.

Soluzione. L'insieme K è l'intersezione del poliedro definito dai piani $y = \pm x$ e $y = 2$ con il solido di rotazione (illimitato) che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la figura contenuta nel primo quadrante del piano rz (con $r = \sqrt{x^2+y^2}$) compresa tra il grafico di $z = 1/r$ per $r \ge 2$ e l'asse delle ascisse.
L'insieme K è limitato poiché risulta

$$(x\,,y\,,z) \in K \qquad \Longrightarrow \qquad 0 \le z \le 2, \; -2 \le x \le 2 \text{ e } 0 \le y \le 2$$

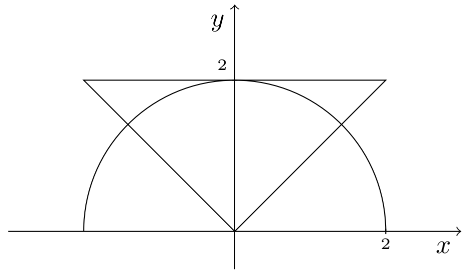
ed è intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue. Pertanto K è compatto e quindi (Lebesgue) misurabile e la funzione f definita da

$$f(x\,,y\,,z) = \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \qquad (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3 \setminus \left\{ (x\,,y\,,z) : \; x = y = 0 \right\},$$

è continua dove definita e quindi è (Lebesgue) integrabile in K.
Calcoliamo I mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione di K sul piano xy è l'insieme

$$\pi_{xy}(K) = \left\{ (x\,,y) : \; \sqrt{x^2+y^2} \le 2 \text{ e } |x| \le y \le 2 \right\}$$

illustrato nella figura seguente



e per ogni $(x\,,y) \in \pi_{xy}(K)$ la corrispondente sezione è l'intervallo

$$K_{(x,y)} = \left[0, 1/\sqrt{x^2+y^2} \right], \qquad (x\,,y) \in \pi_{xy}(K).$$

Per la formula di riduzione si ha allora

$$I = \int_{\pi_{xy}(K)} \left(\int_0^{1/\sqrt{x^2+y^2}} \frac{y}{\sqrt{x^2+y^2}} \, dz \right) d(x\,,y) = \int_{\pi_{xy}(K)} \frac{y}{x^2+y^2} \, d(x\,,y).$$

Denotato con $\Phi(r\,,\theta) = (r\cos\theta, r \operatorname{sen}\theta)$ il diffeomorfismo delle coordinate polari, la proiezione $\pi_{xy}(K)$ di K sul piano xy si esprime in coordinate polari nella forma

$$\Phi^{-1}(\pi_{xy}(K)) = \left\{ (r\,,\theta) : \; 2 \le r \le \frac{2}{\operatorname{sen}\theta} \text{ e } \pi/4 \le \theta \le 3\pi/4 \right\}$$

cosicché, utilizzando nuovamente la formula di riduzione, risulta

$$\begin{aligned} I &= \int_{\Phi^{-1}(\pi_{xy}(K))} \frac{r \operatorname{sen}\theta}{r^2} r \, d(r\,,\theta) = \\ &= \int_{\pi/4}^{3\pi/4} \left(\int_2^{2/\operatorname{sen}\theta} \operatorname{sen}\theta \, dr \right) d\theta = \int_{\pi/4}^{3\pi/4} 2\,(1 - \operatorname{sen}\theta) \, d\theta = \ldots = \pi - 2\sqrt{2} \end{aligned}$$

Esercizio 4. Sia

$$\begin{cases} x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 2e^{-t} + t \\ x(0) = x'(0) = 0. \end{cases}$$

(a) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale.

(b) Determinate la soluzione del problema di Cauchy.

(c) Stabilite se la soluzione $x(t)$ del problema di Cauchy ha un asintoto obliquo per $t \to +\infty$.

Soluzione. (a) L'equazione proposta è una equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 + 2\lambda + 1 = (\lambda + 1)^2 = 0$ che ha $\lambda = -1$ come unica soluzione con molteplicità due. Quindi, le funzioni

$$x_1(t) = e^{-t}; \qquad x_2(t) = te^{-t};$$

con $t \in \mathbb{R}$ sono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 te^{-t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.

Poiché il termine non omogeneo dell'equazione è la somma di una soluzione dell'equazione omogenea corrispondente a una soluzione dell'equazione caratteristica con molteplicità due e di un polinomio di primo grado, è possibile cercare una soluzione dell'equazione completa della forma

$$x_p(t) = At^2 e^{-t} + Bt + C, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $A, B, C \in \mathbb{R}$ costanti da determinare. Si ha con facili calcoli

$$x''(t) + 2x'(t) + x(t) = 2Ae^{-t} + Bt + 2B + C, \qquad t \in \mathbb{R},$$

da cui segue $A = 1$, $B = 1$ e $C = -2$. Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione completa sono le funzioni

$$x(t) = C_1 e^{-t} + C_2 te^{-t} + t^2 e^{-t} + t - 2, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.

(b) Scegliamo le costanti $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ in modo che la soluzione $x(t)$ verifichi le condizioni $x(0) = x'(0) = 0$. Si ha

$$\begin{cases} x(0) = C_1 - 2 = 0 \\ x'(0) = -C_1 + C_2 + 1 = 0 \end{cases}$$

da cui segue $C_1 = 2$ e $C_2 = 1$. La soluzione cercata è dunque la funzione

$$x(t) = \left(t^2 + t + 2\right) e^{-t} + t - 2, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(c) Poiché risulta

$$\lim_{t \to +\infty} \left(t^2 + t + 2\right) e^{-t} = 0,$$

la retta di equazione $x = t - 2$ è asintoto obliquo di $x(t)$ per $t \to +\infty$.