COGNOME ______________________	NON SCRIVERE QUI
NOME ______________________	1	2	3	4
MATRICOLA ⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌋	
LAUREA CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC	

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI

A.A. 2020-2021 — PARMA, 30 MARZO 2021

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore e mezza. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Siano $f\,,g\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ i campi vettoriali di componenti $f = (f^1, f^2)$ e $g = (g^1, g^2)$ definite da:

$$\begin{cases} f^1(x\,,y) = \dfrac{4x}{2x^2+y^2+1} \\ f^2(x\,,y) = \dfrac{2y}{2x^2+y^2+1} \end{cases} \qquad \text{e} \qquad \begin{cases} g^1(x\,,y) = 0 \\ g^2(x\,,y) = \dfrac{y^2}{2x^2+y^2+1} \end{cases}$$

per ogni $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$.

(a) Stabilite se il campo f è conservativo e calcolatene i potenziali.

(b) Determinate l'insieme dei punti $(x\,,y)$ tali che l'integrale curvilineo del campo f dall'origine $(0\,,0)$ a $(x\,,y)$ sia uguale ad 1.

(c) Calcolate l'integrale curvilineo del campo $f+g$ lungo la curva $\gamma(t) = te_1 + t^2e_2$, $t \in [0\,,1]$.

Soluzione. (a) Il campo vettoriale f è di classe $C^1(\mathbb{R}^2)$ e quindi, essendo $\mathbb{R}^2$ convesso, è conservativo poiché risulta

$$f^1_y(x\,,y) = -\frac{8xy}{(2x^2+y^2+1)^2} = f^2_x(x\,,y)$$

per ogni $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$. Tutti i potenziali F di f sono dati da

$$F(x\,,y) = \int_0^x f^1(t\,,0)\,dt + \int_0^y f^2(x\,,t)\,dt = \int_0^x \frac{4t}{2t^2+1}\,dt + \int_0^y \frac{2t}{2x^2+t^2+1}\,dt =$$

$$= \log\left(2t^2+1\right)\Big|_0^x + \log\left(2x^2t^2+1\right)\Big|_0^y = \log\left(2x^2+y^2+1\right) + C$$

per ogni $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$ al variare della costante $C \in \mathbb{R}$.

(b) Essendo il campo f conservativo, l'integrale curvilineo di f lungo una qualunque curva parametrica γ liscia a tratti avente per estremi l'origine e il punto di coordinate $(x\,,y)$ è dato da

$$\int_\gamma f\cdot dl = F(x\,,y) - F(0\,,0) = \log\left(2x^2+y^2+1\right), \qquad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Pertanto, l'insieme cercato è l'insieme dei punti $(x\,,y)$ tali che $2x^2+y^2+1 = \mathrm{e}$ cioè l'ellisse centrata nell'origine con assi paralleli agli assi cartesiani e semiassi $\sqrt{(\mathrm{e}-1)/2}$ e $\sqrt{\mathrm{e}-1}$.

(c) Poiché gli estremi di γ sono i punti di coordinate $\gamma(0) = (0\,,0)$ e $\gamma(1) = (1,1)$, si ha

$$\int_\gamma (f+g)\cdot dl = \int_\gamma f\cdot dl + \int_\gamma g\cdot dl =$$

$$= F(1\,,1) - F(0\,,0) + \int_0^1 \frac{t^4}{2t^2+t^4+1}2t\,dt = \log 4 + \int_0^1 \frac{s^2}{s^2+2s+1}\,ds = \cdots = \frac{3}{2}.$$

Esercizio 2. Sia

$$\Gamma = \left\{(x\,,y) :\ x^2 + 2y^4 = 6\right\}.$$

(a) Provate che Γ è una curva regolare (1−superficie) e compatta in $\mathbb{R}^2$.

(b) Determinate $c > 0$ in modo che i due rami dell'iperbole $xy = c$ siano tangenti a Γ.

Soluzione. (a) Si ha $\Gamma = \{p = 0\}$ ove p è il polinomio definito da

$$p(x\,,y) = x^2 + 2y^4 - 6, \qquad (x\,,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Il gradiente di p si annulla solo nell'origine $(0\,,0)$ che non appartiene a Γ e da ciò segue che Γ è una curva (1−superficie) regolare di $\mathbb{R}^2$. Inoltre, l'insieme Γ è chiuso perché controimmagine di un punto mediante p ed è anche limitato poiché risulta

$$(x\,,y) \in \Gamma \quad \Longrightarrow \quad |x| \le \sqrt{6} \text{ e } |y| \le \sqrt[4]{3}.$$

(b) Il numero $c > 0$ cercato è il valore massimo assunto dalla funzione continua $f(x\,,y) = xy$, $(x\,,y) \in \mathbb{R}^2$, su Γ.
Essendo Γ una curva regolare e compatta, il massimo esiste per il teorema di Weierstrass e può essere determinato con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Il sistema dei moltiplicatori di Lagrange è

$$\begin{cases} y - 2\lambda x = 0 \\ x - 8\lambda y^3 = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 4. \end{cases}$$

Dalla prima equazione si ricava $y = 2\lambda x$ che sostituito nella seconda restituisce

$$x\left(1 - 64\lambda^4 x^2\right) = 0.$$

Se fosse $x = 0$, dalla prima equazione seguirebbe $y = 0$ che non è soluzione della terza equazione. Poiché non può essere $\lambda = 0$, deve essere $x^2 = 1/64\lambda^4$ da cui segue

$$x = \pm\frac{1}{8\lambda^2} \qquad \text{e} \qquad y = \pm\frac{1}{4\lambda}.$$

Sostituendo infine nell'equazione che definisce Γ si trova

$$\frac{1}{64\lambda^4} + \frac{2}{256\lambda^4} = 6 \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = \pm\frac{1}{4}$$

da cui segue infine $x = \pm 2$ e $y = \pm 1$ (4 soluzioni!).
Il massimo di f è assunto nei due punti tra i quattro trovati in cui x e y hanno segno concorde ovvero i punti $P_\pm = \pm(2, 1)$. Ad essi corrisponde $c = 2$ che è il numero cercato.

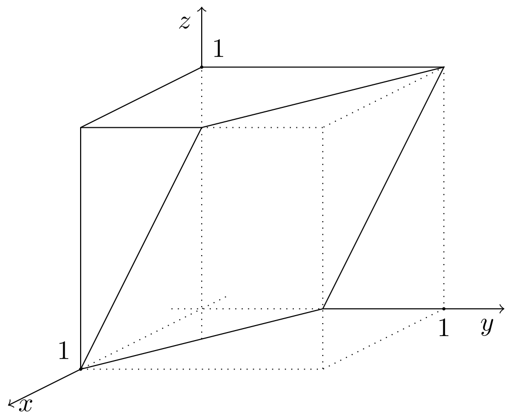
Esercizio 3. Sia

$$K = \left\{(x\,,y\,,z) :\ 0 \le x\,,y\,,z \le 1 \text{ e } x+2y-1 \le z\right\}.$$

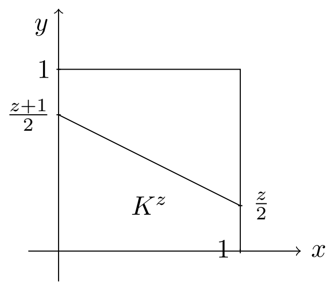
(a) Descrivete e disegnate l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K 2xy\, d(x\,,y\,,z)$.

Soluzione. (a) L'insieme K è il poliedro ottenuto prendendo la parte del cubo di lato unitario con vertice nell'origine contenuto nel semispazio a coordinate positive che sta al di sopra del piano di equazione $x+2y-z=1$. Esso è rappresentato in Figura (1).



(1)



(2)

(b) L'insieme K è evidentemente compatto e quindi (Lebesgue) misurabile. Inoltre, la funzione

$$f(x\,,y\,,z) = 2xy, \qquad (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3,$$

è un polinomio e quindi è integrabile su ogni insieme misurabile e compatto.
Calcoliamo l'integrale di f su K mediante la formula di riduzione per strati. La proiezione di K sull'asse z è l'intervallo $\pi_z(K) = [0\,,1]$ e le corrispondenti sezioni sono gli insiemi

$$K^z = \left\{(x\,,y) :\ x+2y \le z+1 \text{ e } 0 \le x\,,y \le 1\right\}, \qquad z \in [0,1],$$

rappresentati in Figura (2). Per la formula di riduzione si ha allora

$$I = \int_0^1 \left(\int_{K^z} 2xy\, d(x\,,y)\right) dz$$

e per la stessa formula risulta poi

$$\begin{aligned}
\int_{K^z} 2xy\, d(x\,,y) &= \int_0^1 \left(\int_0^{(z+1)/2-x/2} 2xy\, dx\right) dy = \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 x\left[(z+1)-x\right]^2\, dy = \\
&= \frac{1}{4}\int_0^1 \left[x(z+1)^2 - 2x^2(z+1) + x^3\right]\, dy = \frac{1}{8}(z+1)^2 - \frac{1}{6}(z+1) + \frac{1}{16}
\end{aligned}$$

per ogni $z \in [0,1]$ da cui segue infine

$$I = \int_0^1 \left\{\frac{1}{8}(z+1)^2 - \frac{1}{6}(z+1) + \frac{1}{6}\right\} dz = \frac{1}{24}(z+1)^3 - \frac{1}{12}(z+1)^2 + \frac{1}{16}(z+1)\Bigg|_0^1 = \cdots = \frac{5}{48}.$$

Esercizio 4. Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = t^2[x(t)]^3 \\ x(0) = -1. \end{cases}$$

Soluzione. L'equazione differenziale proposta è un'equazione a variabili separabili. La funzione a secondo membro è $f(t, x) = g(t)h(x)$ con

$$g(t) = t^2, \qquad t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad h(x) = x^3, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

In tale intervallo la funzione h è infinite volte derivabile e quindi il problema di Cauchy considerato ha soluzione massimale $x \in C^\infty(\alpha, \beta)$ con $-\infty \leq \alpha < 0 < \beta \leq +\infty$. Tale soluzione è prolungamento di ogni altra soluzione del medesimo problema di Cauchy.
Poiché la soluzione del medesimo problema di Cauchy con dato iniziale $x_0 = 0$ è la funzione identicamente nulla $x(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, la soluzione massimale del problema di Cauchy considerato verifica la condizione $x(t) < 0$ per ogni $t \in (\alpha, \beta)$. Ponendo

$$H(y) = \int_{-1}^{y} \frac{1}{z^3}\, dz = -\frac{1}{2z^2}\bigg|_{-1}^{y} = \frac{1}{2} - \frac{1}{2y^2}, \qquad y < 0,$$

si deduce che la funzione composta $H \circ x$ è in $C^\infty(\alpha, \beta)$ e verifica $(H \circ x)'(t) = t^2$ per $\alpha < t < \beta$ e $H \circ x(0) = 0$. Dunque, per il teorema fondamentale del calcolo, deve essere $(H \circ x)(t) = t^3/3$ per $\alpha < t < \beta$ da cui segue con semplici calcoli

$$x(t) = -\sqrt{\frac{3}{3 - 2t^3}}, \qquad \alpha < t < \beta.$$

Poiché si ha

$$\lim_{y \to -\infty} H(y) = \frac{1}{2} \qquad \text{e} \qquad \lim_{y \to 0^-} H(y) = -\infty,$$

deve essere

$$-\infty < \frac{t^3}{3} < \frac{1}{2}$$

da cui segue

$$\alpha = -\infty \qquad \text{e} \qquad \beta = \sqrt[3]{\frac{3}{2}}.$$

La soluzione massimale è dunque

$$x(t) = -\sqrt{\frac{3}{3 - 2t^3}}, \qquad t < \sqrt[3]{\frac{3}{2}}.$$