Cognome		Non scrivere qui
Nome		1 | 2 | 3 | 4
Matricola		
Laurea	Civ Amb Gest Inf Eln Tlc Mec	

Università degli Studi di Parma
Dipartimento di Ingegneria e Architettura
Esame di Analisi Matematica 2 — Soluzioni
A.A. 2020-2021 — Parma, 16 Febbraio 2021

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Siano $f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ la funzione vettoriale di componenti $f = (f^1, f^2, f^3)$ definite da

$$f^1(x,y) = x^2 + y^2; \qquad f^2(x,y) = -xy; \qquad f^3(x,y) = x^3 - y^3;$$

per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ una funzione differenziabile e siano $h = g \circ f\colon \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ la relativa funzione composta e P il punto di coordinate $P = (1,1)$.

(a) Calcolate il gradiente della funzione composta $h = g \circ f$ nel punto P.

(b) Determinate quali condizioni deve verificare la funzione g affinché P sia un punto critico di h.

(c) Si ha $f(1,1) = (2,-1,0)$ e, supponendo che siano $g(2,-1,0) = 10$ e $\nabla g(2,-1,0) = (4,4,1)$, scrivete l'equazione del piano tangente al grafico di h in P.

Soluzione. (a) Le derivate parziali della funzione composta sono

$$\begin{aligned} h_x(x,y) &= g_u(f(x,y))f^1_x(x,y) + g_v(f(x,y))f^2_x(x,y) + g_w(f(x,y))f^3_x(x,y) \\ h_y(x,y) &= g_u(f(x,y))f^1_xy(x,y) + g_v(f(x,y))f^2_y(x,y) + g_w(f(x,y))f^3_y(x,y) \end{aligned}$$

per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e quindi, calcolando le derivate parziali delle componenti di f in P, risulta

$$\begin{aligned} h_x(1,1) &= 2g_u(2,-1,0) - g_v(2,-1,0) + 3g_w(2,-1,0) \\ h_y(1,1) &= 2g_u(2,-1,0) - g_v(2,-1,0) - 3g_w(2,-1,0). \end{aligned}$$

(b) Affinché risulti $h_x(1,1) = h_y(1,1) = 0$ deve essere

$$g_v(2,-1,0) = 2g_u(2,-1,0) \qquad \text{e} \qquad g_w(2,-1,0) = 0.$$

(c) L'equazione del piano tangente al grafico di h in P è

$$z = z_0 + h_x(1,1)(x-1) + h_y(1,1)(y-1)$$

con $z_0 = h(1,1)$. Per ipotesi si ha

$$z_0 = h(1,1) = 10 \quad \text{e} \quad \begin{cases} h_x(1,1) = 2g_u(2,-1,0) - g_v(2,-1,0) + 3g_w(2,-1,0) = 8 - 4 + 3 = 7 \\ h_y(1,1) = 2g_u(2,-1,0) - g_v(2,-1,0) - 3g_w(2,-1,0) = 8 - 4 - 3 = 1 \end{cases}$$

e quindi l'equazione del piano tangente è

$$7x + y - z = 2.$$

Esercizio 2. Sia Γ la curva otternuta come intersezione tra il paraboloide di equazione $z+1/2 = x^2+y^2$ e il piano di equazione $x + y + z = 1$.

(a) Verificate che Γ è una curva ($1-$superficie) regolare in $\mathbb{R}^3$.

(b) Calcolate la distanza di Γ dall'asse z.

Soluzione. (a) Sia $\Phi \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^2)$ la funzione di componenti $\Phi = \left(\Phi^1, \Phi^2\right)$ definite da

$$\Phi^1(x, y, z) = x^2 + y^2 - z - 1/2 \qquad \text{e} \qquad \Phi^2(x, y, z) = x + y + z - 1$$

per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ cosicché risulta $\Gamma = \Phi^{-1}(0, 0)$. Si ha

$$D\Phi(x, y, z) = \begin{pmatrix} 2x & 2y & -1 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

e quindi risulta $\operatorname{rk} D\Phi(x, y, z) \le 1$ se e solo se tutti i minori di ordine due della matrice $D\Phi(x, y, z)$ sono nulli ovvero si ha $2x - 2y = 2x + 1 = 2y + 1 = 0$. L'unica soluzione di questo sistema è data da $x = y = -1/2$ e nessun punto di coordinate $(-1/2, -1/2, z)$ appartiene a Γ per alcun valore di z. Quindi Γ è una $1-$superficie regolare di $\mathbb{R}^3$. Inoltre, l'insieme Γ è evidentemente chiuso e anche limitato poiché risulta

$$(x, y, z) \in \Gamma \quad \Longrightarrow \quad x^2+y^2 = 3/2-(x+y) \le 3/2+\sqrt{2}\sqrt{x^2 + y^2} \quad \Longrightarrow \quad \|(x, y)\| = \sqrt{x^2 + y^2} \le 3/\sqrt{2}.$$

(b) La distanza d di Γ dall'asse z è la radice quadrata del minimo della funzione $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ su Γ. Essendo Γ una curva regolare e compatta, il minimo esiste per il teorema di Weierstrass e può essere determinato con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Il sistema dei moltiplicatori di Lagrange è

$$\begin{cases} 2x - 2\lambda x - \mu = 0 \\ 2y - 2\lambda y - \mu = 0 \\ \lambda - \mu = 0 \end{cases}$$

cui va aggiunta la condizione $(x, y) \in \Gamma$. Da queste equazioni segue che deve essere $\lambda = \mu \neq 1$ e

$$x = y = \frac{\lambda}{2(1-\lambda)}$$

da cui segue

$$\begin{cases} z + 1/2 = 2\left(\dfrac{\lambda}{2(1-\lambda)}\right)^2 \\ \dfrac{2\lambda}{2(1-\lambda)} + z = 1 \end{cases} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{\lambda}{2(1-\lambda)} \in \left\{-\frac{3}{2}; \frac{1}{2}\right\}.$$

Conseguentemente il minimo di $(x, y) \mapsto x^2 + y^2$ su Γ è assunto nei punti di Γ di coordinate $x = y = 1/2$ cosicché risulta $d = 1/\sqrt{2}$.
Alternativamente osserviamo che per $(x, y, z) \in \Gamma$ si ha $x^2 + y^2 = z + 1/2$ e $z = 1 - (x + y)$ da cui segue

$$x^2 + y^2 = 1 - (x + y) + 1/2 \qquad \Longrightarrow \qquad (x + 1/2)^2 + (y + 1/2)^2 = 2.$$

La proiezione di Γ sul piano xy è quindi la circonferenza di centro $(-1/2, -1/2)$ e raggio $r = \sqrt{2}$ e quindi la distanza da Γ dall'asse z coincide con la distanza dall'origine della sua proiezione sul piano xy che evidentemente è data da

$$d = \sqrt{2} - \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{1}{4}} = \sqrt{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

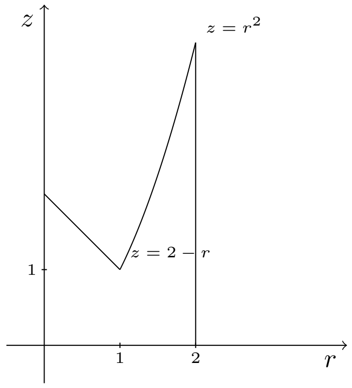
Esercizio 3. Sia

$$K = \left\{(x, y, z) :\ x^2 + y^2 \le 4,\ 0 \le y \le x/\sqrt{3} \text{ e } 0 \le z \le \max\left\{x^2 + y^2, 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\right\}\right\}.$$

(a) Descrivete e disegnate l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K xy\, d(x, y, z)$.

Soluzione. L'insieme K è l'intersezione della parte del poliedro definito dai piani $y = 0$ e $y = x/\sqrt{3}$ contenuta nel semispazio $x \ge 0$ con il solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la figura contenuta nel primo quadrante del piano rz (con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$) ottenuta compresa tra l'asse z e i grafici di $z = 2 - r$ per $0 \le r \le 1$ e $z = r^2$ per $1 \le r \le 2$ come illustrato nella figura seguente.



L'insieme K è compatto perché è limitato ed è intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue e quindi è (Lebesgue) misurabile. La funzione f definita da

$$f(x, y, z) = xy \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

è è un polnimio e quindi è integrabile in K.
Calcoliamo I mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione di K sul piano xy è la porzione di cerchio

$$\pi_{xy}(K) = \left\{(x, y) :\ x^2 + y^2 \le 4 \text{ e } 0 \le y \le x/\sqrt{3}\right\}$$

e per ogni $(x, y) \in \pi_{xy}(K)$ la corrispondente sezione è l'intervallo

$$K_{(x,y)} = \begin{cases} \left[0, 2 - \sqrt{x^2 + y^2}\right] & \text{se } \sqrt{x^2 + y^2} \le 1 \\ \left[0, x^2 + y^2\right] & \text{se } 1 \le \sqrt{x^2 + y^2} \le 2 \end{cases} \qquad (x, y) \in \pi_{xy}(K).$$

Posto

$$K_1 = \left\{(x, y) \in K :\ \sqrt{x^2 + y^2} \le 1\right\} \qquad \text{e} \qquad K_2 = \left\{(x, y) \in K :\ 1 \le \sqrt{x^2 + y^2} \le 2\right\},$$

ed essendo la loro intersezione trascurabile, per la formula di riduzione si ha allora

$$\begin{aligned} I &= \int_{K_1} xy\, d(x, y, z) + \int_{K_2} xy\, d(x, y, z) = \\ &= \int_{\pi_{xy}(K_1)} \left(\int_0^{2-\sqrt{x^2+y^2)}} xy\, dz\right) d(x, y) + \int_{\pi_{xy}(K_2)} \left(\int_0^{x^2+y^2)} xy\, dz\right) d(x, y) = \\ &= \int_{\pi_{xy}(K_1)} xy \left(2 - \sqrt{x^2 + y^2}\right) d(x, y) + \int_{\pi_{xy}(K_2)} xy \left(x^2 + y^2\right) d(x, y) \end{aligned}$$

e, utilizzando coordinate polari nel piano abbinate nuovamente alla formula di riduzione, risulta

$$\begin{aligned} I &= \int_0^{\pi/3} \operatorname{sen}\theta \cos\theta\, d\theta \left(\int_0^1 r^3(2 - r)\, dr + \int_1^2 r^5\, dr\right) = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2\theta\Big|_0^{\pi/6} \left\{ \left(\frac{1}{2}r^4 - \frac{1}{5}r^4\right)\Big|_0^1 + \frac{1}{6}r^6\Big|_1^2 \right\} = \frac{1}{8}\left(\frac{3}{10} + \frac{21}{2}\right) = \frac{27}{20}. \end{aligned}$$

Esercizio 4. Determinate la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x' = 2t\left([x(t)]^2 + x(t)\right) \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Soluzione. L'equazione differenziale proposta può essere risolta come equazione a variabili separabili o come equazione di Bernoulli. Procediamo nel primo modo.
La funzione a secondo membro è $f(t,x) = g(t)h(x)$ con

$$g(t) = 2t, \qquad t \in \mathbb{R} \qquad \text{e} \qquad h(x) = x^2 + x, \qquad x \in \mathbb{R}.$$

In tale intervallo la funzione h è infinite volte derivabile e quindi il problema di Cauchy considerato ha soluzione massimale $x \in C^\infty(\alpha,\beta)$ con $-\infty \leq \alpha = \alpha(x_0) < 0 < \beta = \beta(x_0) \leq +\infty$. Tale soluzione è prolungamento di ogni altra soluzione del medesimo problema di Cauchy.
Poiché la soluzione del medesimo problema di Cauchy con dato iniziale $x(0) = 0$ è la funzione identicamente nulla $x(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, la soluzione massimale del problema di Cauchy considerato verifica la condizione $x(t) > 0$ per ogni $t \in (\alpha,\beta)$. Ponendo

$$H(y) = \int_1^y \frac{1}{z^2+z}\,dz = \int_1^y \left(\frac{1}{z} - \frac{1}{z+1}\right)dz = \log\left(\frac{z}{z+1}\right)\bigg|_1^y = \log\left(\frac{y}{y+1}\right) - \log\frac{1}{2}, \qquad y > 0,$$

si deduce che la funzione composta $H \circ x$ è in $C^\infty(\alpha,\beta)$ e verifica $(H \circ x)'(t) = 2t$ per $\alpha < t < \beta$ e $H \circ x(0) = 0$. Per il teorema fondamentale del calcolo deve dunque essere $(H \circ x)(t) = t^2$ per $\alpha < t < \beta$ da cui segue con semplici calcoli

$$x(t) = \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{2 - \mathrm{e}^{t^2}}, \qquad \alpha < t < \beta.$$

Poiché si ha

$$\lim_{y\to 0^+} H(y) = -\infty \qquad \text{e} \qquad \lim_{y\to+\infty} H(y) = \log 2,$$

e deve essere $-\infty < t^2 < \log 2$, si conclude che risulta

$$\alpha = -\sqrt{\log 2} \qquad \text{e} \qquad \beta = \sqrt{\log 2}.$$

La soluzione massimale è dunque

$$x(t) = \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{2 - \mathrm{e}^{t^2}}, \qquad |t| < \sqrt{\log 2}.$$