Cognome	____________________	Non scrivere qui
Nome	____________________	1 | 2 | 3 | 4
Matricola	└─┴─┴─┴─┴─┴─┴─┘	
Laurea	Civ Amb Gest Inf Eln Tlc Mec	

Università degli Studi di Parma

Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Esame di Analisi Matematica 2 — Soluzioni

A.A. 2020-2021 — Parma, 26 Gennaio 2021

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore e mezza. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Siano $a, b \in \mathbb{R}$ due numeri reali e sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ il campo vettoriale di componenti

$$f^1(x,y,z) = \frac{axy}{1+x^4y^2}; \qquad f^2(x,y,z) = \frac{x^2}{1+x^4y^2} + z^2\cos\left(yz^2\right); \qquad f^3(x,y,z) = byz\cos\left(yz^2\right);$$

per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Determinate per quali valori di $a, b \in \mathbb{R}$ il campo è conservativo e per tali valori determinatene un potenziale.

(b) Calcolate per ogni valore di $a, b \in \mathbb{R}$ l'integrale curvilineo del campo vettoriale f lungo la curva parametrica $\gamma(t) = te_1 + te_2$, $t \in [0,1]$.

Soluzione. (a) Poiché f è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^3$ che è un aperto convesso, il campo vettoriale è conservativo se e solo se è irrotazionale. Poiché le derivate in croce di f sono date da

$$\partial_y f^1(x,y,z) = a\frac{x\left(1+x^4y^2\right) - 2x^5y^2}{\left(1+x^4y^2\right)^2}; \qquad \partial_x f^2(x,y,z) = \frac{2x\left(1+x^4y^2\right) - 4x^5y^2}{\left(1+x^4y^2\right)^2};$$

$$\partial_z f^2(x,y,z) = 2z\cos\left(yz^2\right) - 2yz^3\operatorname{sen}\left(yz^2\right); \qquad \partial_y f^3(x,y,z) = bz\cos\left(yz^2\right) - byz^3\operatorname{sen}\left(yz^2\right);$$

oltre a $\partial_z f^1(x,y,z) = \partial_x f^3(x,y,z) = 0$ per ogni (x,y,z), ció accade se solo se risulta $a = b = 2$. Per tali valori un potenziale di f è dato da

$$\begin{aligned} F(x,y,z) &= \int_0^x f^1(t,0,0)\,dt + \int_0^y f^2(x,t,0)\,dt + \int_0^z f^1(x,y,t)\,dt = \\ &= \int_0^y \frac{x^2}{1+x^4t^2}\,dt + 2\int_0^z yt\cos\left(yt^2\right)dt = \\ &= \arctan\left(x^2y\right) + \operatorname{sen}\left(yz^2\right) \end{aligned}$$

per ogni (x,y,z).

(b) L'integrale curvilineo di f lungo γ è

$$\int_\gamma f\cdot dl = \int_0^1 a\frac{t^2}{1+t^6}\,dt + \int_0^1 \frac{t^2}{1+t^6}\,dt = (a+1)\int_0^1 \frac{t^2}{1+t^6}\,dt = \frac{a+1}{3}\arctan\left(t^3\right)\Big|_0^1 = (a+1)\frac{\pi}{12}.$$

Esercizio 2. Sia Γ l'ellisse di equazione $7x^2 + 6\sqrt{3}xy + 13y^2 = 16$. Determinate la proiezione

$$\pi_x(\Gamma) = \left\{x :\ \exists\, y \in \mathbb{R} \text{ tale che } 7x^2 + 6\sqrt{3}xy + 13y^2 = 16\right\}$$

di Γ sull'asse delle ascisse.

Soluzione. La proiezione $\pi_x(\Gamma)$ di Γ sull'asse delle ascisse è l'intervallo $[-M\,, M]$ ove il numero $M > 0$ è definito da

$$M = \max\left\{x :\ \exists\, y \in \mathbb{R} \text{ tale che } 7x^2 + 6\sqrt{3}xy + 13y^2 = 16\right\}.$$

Il massimo esiste per il teorema di Weierstrass poiché l'ellisse Γ è un insieme compatto e la funzione $(x\,, y) \mapsto x$ è lineare.
Poiché l'ellisse Γ è una $1-$superficie (curva) regolare nel piano, possiamo determinare M con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Il sistema dei moltiplicatori di Lagrange è

$$\begin{cases} 1 - \lambda\left(14x - 6\sqrt{3}y\right) = 0 \\ -\lambda\left(26y + 6\sqrt{3}x\right) = 0 \\ 7x^2 + 6\sqrt{3}xy + 13y^2 = 16 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \lambda\left(7x + 3\sqrt{3}y\right) = 1 \\ \lambda\left(3\sqrt{3}x + 13y\right) = 0 \\ 7x^2 + 6\sqrt{3}xy + 13y^2 = 16. \end{cases}$$

Essendo $\lambda \neq 0$ in conseguenza della prima equazione, dalla seconda si ottiene che deve essere

$$y = -\frac{3\sqrt{3}}{13}x$$

cosicché, sostituendo nell'equazione dell'ellisse, risulta

$$7x^2 - \frac{54}{13}x^2 + \frac{27}{13} = 16 \qquad \Longleftrightarrow \qquad x^2 = \frac{13}{4}$$

da cui segue

$$x = \pm\frac{\sqrt{13}}{2} \qquad \text{e} \qquad y = \mp\frac{3}{2}\sqrt{\frac{3}{13}}.$$

Risulta dunque $M = \sqrt{13}/2$ e quindi la proiezione di Γ sull'asse x è l'intervallo

$$\left[-\frac{\sqrt{13}}{2}, \frac{\sqrt{13}}{2}\right].$$

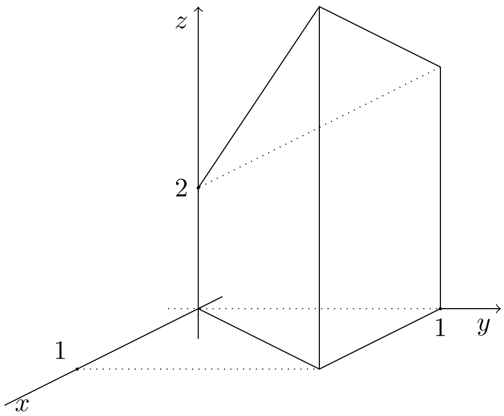
Esercizio 3. Sia

$$K = \left\{(x,y,z) : \ 0 \le x \le y \le 1 \text{ e } 0 \le z \le x + 2y + 2\right\}.$$

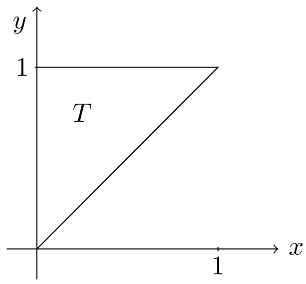
(a) Descrivete e disegnate l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K (x+y)\, d(x,y,z)$.

Soluzione. (a) L'insieme K è il poliedro individuato dai piani $x = 0$, $x = y$ e $y = 1$ e compreso tra i piani $z = 0$ e $z = x + 2y + 2$. Esso è rappresentato in Figura (1) (asse z non in scala).



(1)



(2)

(b) L'insieme K è chiuso in quanto intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni lineari ed è limitato poiché si ha $0 \le x \le y \le 1$ e $0 \le z \le 5$. Pertanto K è compatto e quindi (Lebesgue) misurabile. Inoltre, la funzione

$$f(x,y,z) = x + y, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

è lineare e quindi è integrabile su ogni insieme compatto.
Calcoliamo l'integrale di f su K mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione di K sul piano xy è il triangolo

$$T = \pi_{xy}(K) = \left\{(x,y) : \ 0 \le x \le y \le 1\right\},$$

e le corrispondenti sezioni sono gli intervalli

$$K_{(x,y)} = [0, x + 2y + 2], \qquad (x,y) \in T.$$

Per la formula di riduzione si ha allora

$$\begin{aligned} I &= \int_T \left(\int_0^{x+2y+2} (x+y)\, dz \right) d(x,y) = \\ &= \int_T (x+y)(x+2y+2)\, d(x,y) = \int_T \left(x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + 2y\right) d(x,y) \end{aligned}$$

e per la stessa formula risulta poi

$$\begin{aligned} \int_T \left(x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + 2y\right) d(x,y) &= \int_0^1 \left(\int_0^y \left(x^2 + 3xy + 2y^2 + 2x + 2y\right) dx \right) dy = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{1}{3}y^3 + \frac{3}{2}y^3 + 2y^3 + y^2 + 2y^2 \right) dy = \\ &= \int_0^1 \left(\frac{23}{6}y^3 + 3y^2 \right) dy = \frac{23}{24} + 1 = \frac{47}{24}. \end{aligned}$$

Esercizio 4. Considerate il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) - 2x'(t) - 3x(t) = -4(t+1)\mathrm{e}^{t} - 8\mathrm{e}^{-t} \\ x(0) = 5 \text{ e } x'(0) = -8. \end{cases}$$

(a) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale.

(b) Determinate la soluzione del problema di Cauchy.

Soluzione. (a) L'equazione proposta è una equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 2\lambda - 3 = (\lambda+1)(\lambda-3) = 0$ le cui soluzioni reali e distinte sono $\lambda = -1$ e $\lambda = 3$. Quindi, le funzioni

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{-t} \qquad \text{e} \qquad x_2(t) = \mathrm{e}^{3t}$$

con $t \in \mathbb{R}$ sono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2\mathrm{e}^{3t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1,2)$ costanti arbitrarie.
Poiché il termine non omogeneo dell'equazione è la somma di un primo termine che è il prodotto di un polinomio di grado uno per un'esponenziale che non è soluzione dell'equazioen omogenea e di un altro termine che è soluzione dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione dell'equazione completa della forma

$$x_p(t) = (At+B)\mathrm{e}^{t} + Ct\mathrm{e}^{-t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $A, B, C \in \mathbb{R}$ costanti da determinare. Si ha allora

$$x_p''(t) - 2x_p'(t) - 3x_p(t) = 4(At+B)\mathrm{e}^{t} - 4C\mathrm{e}^{-t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

da cui segue $A = B = 1$ e $C = 2$.
Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione completa sono le funzioni

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{-t} + C_2\mathrm{e}^{3t} + (t+1)\mathrm{e}^{t} + 2t\mathrm{e}^{-t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1,2)$ costanti arbitrarie.
(b) Scegliamo le costanti $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1,2)$ in modo che la soluzione $x(t)$ definita in (a) sia tale che $x(0) = 5$ e $x'(0) = -8$. Si ha

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + C_2 + 1 = 5 \\ x'(0) = -C_1 + 3C_2 + 4 = -8 \end{cases}$$

da cui segue $C_1 = 6$ e $C_2 = -2$. La soluzione cercata è dunque la funzione

$$x(t) = 2(t+3)\mathrm{e}^{-t} + (t+1)\mathrm{e}^{t} - 2\mathrm{e}^{3t}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$