Cognome	______________	Non scrivere qui	
Nome	______________	1 2 3 4	
Matricola	________		
Laurea	Civ Amb Gest Inf Eln Tlc Mec		

Università degli Studi di Parma
Dipartimento di Ingegneria e Architettura
Esame di Analisi Matematica 2 — Soluzioni
A.A. 2020-2021 — Parma, 11 Gennaio 2021

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore e mezza. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Sia

$$K = \left\{(x,y):\ x^4 + 9y^2 \le 16 \text{ e } x,y \ge 0\right\}.$$

(a) Calcolate l'integrale curvilineo del campo di vettori $f \in C^\infty(\mathbb{R}^2,\mathbb{R}^2)$ di componenti

$$f^1(x,y) = x^3 y \qquad \text{e} \qquad f^2(x,y) = xy$$

lungo il bordo di K orientato in verso antiorario.

(b) Determinate il massimo su K della funzione $g(x,y) = 2x^2 + 9y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.

Soluzione. (a) Il bordo di K può essere parametrizzato come incollamento $\gamma = \gamma_1 \odot \gamma_2 \odot \gamma_3$ dei tre archi parametrici

$$\gamma_1(t) = te_1; \qquad \gamma_2(t) = (t-2)e_1 + \frac{1}{3}\sqrt{16-(t-2)^4}\,e_2; \qquad \gamma_3(t) = (t-4/3)e_2;$$

con $t \in [0,2]$ per γ_1 e γ_2 e $t \in [0,4/3]$ per γ_3. L'integrale curvilineo di f lungo γ_1 e γ_3 è nullo cosicché risulta

$$\int_\gamma f \cdot dl = \int_{\gamma_2} f \cdot dl$$

e, anche se γ_2 non è un arco liscio, l'integrale curvilineo di f lungo γ_2 è ben definito poiché, invertendo il verso di γ_2, risulta

$$\int_{\gamma_2} f \cdot dl = -\int_0^2 \left\{\frac{1}{3}t^3\sqrt{16-t^4} + \frac{1}{3}t\sqrt{16-t^4}\,\frac{-2t^3/3}{\sqrt{16-t^4}}\right\} dt =$$
$$= \int_0^2 \left\{\frac{2}{9}t^4 - \frac{1}{3}t^3\sqrt{16-t^4}\right\} dt = \left[\frac{2}{45}t^5 + \frac{1}{18}\left(16-t^4\right)^{3/2}\right]\Bigg|_0^2 = \cdots = -\frac{32}{15}.$$

(b) L'insieme K è compatto, essendo chiuso e limitato in $\mathbb{R}^2$, e la funzione g è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^2$, essendo un polinomio. Esiste dunque il massimo globale di g su K per il teorema di Weierstrass. L'unico punto critico di g in $\mathbb{R}^2$ è l'origine che è evidentemente punto di minimo globale di g e quindi il massimo globale di g su K deve essere assunto sul bordo di K. Sui due segmenti del bordo di K che sono sostegno di γ_1 e γ_3 il massimo di g è evidentemente assunto nei punti di coordinate $(2,0)$ e $(0,4/3)$ che sono anche punti della parte del bordo di K che è sostegno di γ_2 e quindi il massimo globale di g su K deve essere assunto su di esso. Tale insieme è formato dai punti di coordinate (x,y) con $x^4 + 9y^2 = 16$ per $x \in [0,2]$ e $y \ge 0$ e su tale insieme g coincide con la funzione

$$h(x,y) = 2x^2 + 16 - x^4 = -\left(x^2-1\right)^2 + 17, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

che ha evidentemente massimo globale in $x = 1$ corrispondente al punto di coordinate $(1,\sqrt{15}/3)$. Il massimo globale di g su K è quindi $g(1,\sqrt{15}/3) = 17$.

Esercizio 2. Sia
$$f(x,y,z) = x^4 + y^4 - 8x^2 - 8y^2 + 8z^2 + 16xz, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Determinate gli eventuali punti critici di f e stabilitene la natura.

(b) Determinate l'immagine $f(\mathbb{R}^3)$.

Soluzione. (a) La funzione f è un polinomio e quindi è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Le derivate parziali di f sono date da
$$f_x(x,y,z) = 4x^3 - 16x + 16z; \qquad f_y(x,y,z) = 4y^3 - 16y; \qquad f_z(x,y,z) = 16z + 16x;$$
per ogni (x,y,z) e quindi i punti critici sono le soluzioni del sistema formato dalle equazioni
$$\begin{cases} x^3 - 4x + 4z = 0 \\ y\left(y^2 - 4\right) = 0 \\ x + z = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x\left(x^2 - 8\right) = 0 \\ y\left(y^2 - 4\right) = 0 \\ z = -x \end{cases}$$
cui corrispondono i punti di coordinate
$$P = (0,0,0); \qquad Q_\pm = (0,\pm 2,\pm 0); \qquad R_\pm = (\pm 2\sqrt{2}, 0, \mp 2\sqrt{2}); \qquad S_{\pm,\sigma} = (\pm 2\sqrt{2}, \sigma 2, \mp 2\sqrt{2});$$
ove $\sigma \in \{\pm 1\}$. La funzione f ha dunque nove punti critici. Poiché la funzione f è pari in y e risulta $f(-x,y,-z) = f(x,y,z)$ per ogni (x,y,z), punti critici con segno opposto di y o della coppia (x,z) hanno la stessa natura.
La matrice hessiana di f è
$$D^2 f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 12x^2 - 16 & 0 & 16 \\ 0 & 12y^2 - 16 & 0 \\ 16 & 0 & 16 \end{pmatrix} = 4 \begin{pmatrix} 3x^2 - 4 & 0 & 4 \\ 0 & 3y^2 - 4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$
per ogni (x,y,z). Posto
$$\Delta_m = \det \Big((D^2 f)_h^k \Big)_{1 \le h,k \le m}, \qquad m = 1,2,3,$$
per il criterio di Sylvester si ha
$$D^2 f(P) = 4 \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \Delta_1 < 0 \text{ e } \Delta_2 > 0,\ \Delta_3 > 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \text{sella;}$$
$$D^2 f(Q_\pm) = 4 \begin{pmatrix} -4 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & -2 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \Delta_m < 0 \text{ per } m = 1,2,3 \qquad \Longrightarrow \qquad \text{selle;}$$
$$D^2 f(R_\pm) = 4 \begin{pmatrix} 20 & 0 & 4 \\ 0 & -4 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \Delta_1 > 0 \text{ e } \Delta_2 < 0,\ \Delta_3 < 0 \qquad \Longrightarrow \qquad \text{selle;}$$
$$D^2 f(S_{\pm,\sigma}) = 4 \begin{pmatrix} 20 & 0 & 4 \\ 0 & 8 & 0 \\ 4 & 0 & 4 \end{pmatrix} \qquad \Delta_m > 0 \text{ per } m = 1,2,3 \qquad \Longrightarrow \qquad \text{minimi.}$$

(b) Dalla disuguaglianza $ab \ge -(a^2 + b^2)/2$ con $a = 4x$ e $b = 2z$ segue
$$f(x,y,z) \ge x^4 + z^4 - 24x^2 - 8y^2 + 4z^2$$
per ogni (x,y,z). Poiché risulta $x^4 - 24x^2 \ge x^2 + c_1$ e $y^4 - 8y^2 \ge y^2 + c_2$ per ogni x e y per $c_1 = 25/4$ e $c_2 = -9/4$, si ha
$$f(x,y,z) \ge x^2 + y^2 + z^2 - 34/4, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$
Risulta quindi $f(x,y,z) \to +\infty$ per $(x,y,z) \to \infty$ e dunque f ammette minimo globale per il teorema di Weierstrass generalizzato. Per (a) il minimo globale è assunto nei punti di coordinate $S_{\pm,\sigma}$ con $\sigma = \pm 1$ da cui segue
$$f(\mathbb{R}^3) = [f(S_{\pm,\sigma}), +\infty) = [-80, +\infty)$$
per il teorema dei valori intermedi.

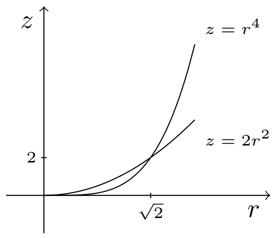
Esercizio 3. Sia

$$K = \left\{(x, y, z) : \left(x^2+y^2\right)^2 \le z \le 2\left(x^2+y^2\right) \text{ e } x \le y \le \sqrt{3}x\right\}.$$

(a) Descrivete e disegnate l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \int_K xy \, d(x, y, z)$.

Soluzione. L'insieme K è l'intersezione della parte del poliedro definito dai piani $x = y$ e $y = \sqrt{3}x$ contenuta nel semispazio $x \ge 0$ con il solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la figura contenuta nel primo quadrante del piano rz (con $r = \sqrt{x^2+y^2}$) compresa tra i grafici di $z = r^4$ e $z = 2r^2$ per $0 \le r \le \sqrt{2}$ come illustrato nella figura seguente (assi non monometrici).



L'insieme K è compatto perché è limitato ed è intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue e quindi è (Lebesgue) misurabile. La funzione f definita da

$$f(x, y, z) = xz \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

è è un polnimio e quindi è integrabile in K.
Calcoliamo I mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione di K sul piano xy è la porzione di cerchio

$$\pi_{xy}(K) = \left\{(x, y) : x^2+y^2 \le \sqrt{2} \text{ e } x \le y \le \sqrt{3}x\right\}$$

e per ogni $(x, y) \in \pi_{xy}(K)$ la corrispondente sezione è l'intervallo

$$K_{(x,y)} = \left[\left(x^2+y^2\right)^2, 2\left(x^2+y^2\right)\right], \qquad (x, y) \in \pi_{xy}(K).$$

Per la formula di riduzione si ha allora

$$I = \int_{\pi_{xy}(K)} \left(\int_{(x^2+y^2)^2}^{2(x^2+y^2)} xy \, dz\right) d(x, y) = \int_{\pi_{xy}(K)} xy \left[2\left(x^2+y^2\right) - \left(x^2+y^2\right)^4\right] d(x, y)$$

e, utilizzando coordinate polari nel piano abbinate nuovamente alla formula di riduzione, risulta

$$\begin{aligned} I &= \int_{[0,\sqrt{2}]\times[\pi/4,\pi/3]} (r\cos\theta)(r \operatorname{sen}\theta)\left(2r^2 - r^4\right) d(r, \theta) = \\ &= \int_{\pi/4}^{\pi/3} \cos\theta \operatorname{sen}\theta \, d\theta \int_0^{\sqrt{2}} r^3\left(2r^2 - r^4\right) dr = \\ &= \frac{1}{2} \operatorname{sen}^2\theta \Big|_{\pi/4}^{\pi/3} \left(\frac{1}{3}r^6 - \frac{1}{8}r^8\right)\Big|_0^{\sqrt{2}} = \frac{1}{2}\left(\frac{3}{4} - \frac{1}{2}\right)\left(\frac{8}{3} - 2\right) = \frac{1}{12}. \end{aligned}$$

Esercizio 4. Considerate il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) - 4x'(t) + 4x(t) = \dfrac{e^{2t}}{t^2+9} \\ x(0) = 0 \text{ e } x'(0) = 1. \end{cases}$$

(a) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale.

(b) Determinate la soluzione del problema di Cauchy.

Soluzione. (a) L'equazione proposta è una equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 4\lambda + 4 = (\lambda - 2)^2 = 0$ avente due soluzioni coincidenti $\lambda = 2$. Quindi, le funzioni

$$x_1(t) = e^{2t}; \qquad x_2(t) = te^{2t};$$

con $t \in \mathbb{R}$ sono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni

$$x(t) = C_1 e^{2t} + C_2 t e^{2t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
Per determinare una soluzione dell'equazione completa procediamo con il metodo della variazione delle costanti arbitrarie cercando una soluzione $x_p(t)$ della forma

$$x_p(t) = c_1(t)e^{2t} + c_2(t)te^{2t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $c_1(t)$ e $c_2(t)$ funzioni da determinare in modo che risulti

$$\begin{cases} c_1'(t)e^{2t} + c_2'(t)te^{2t} = 0 \\ 2c_1'(t)e^{2t} + c_2'(t)(1 + 2t)e^{2t} \end{cases}$$

per gli stessi t. Il sistema precedente è equivalente a

$$\begin{cases} c_1'(t) = -\dfrac{t}{t^2+9} \\ c_2'(t) = \dfrac{1}{t^2+9} \end{cases}$$

con $t \in \mathbb{R}$ da cui segue

$$c_1(t) = -\frac{1}{2}\log\left(t^2+9\right) \quad \text{e} \quad c_2(t) = \frac{1}{3}\arctan(t/3)$$

per gli stessi t. Risulta così

$$x_p(t) = -\frac{1}{2}e^{2t}\log\left(t^2+9\right) + \frac{1}{3}te^{2t}\arctan\frac{t}{3}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

e quindi tutte le soluzioni dell'equazione completa sono le funzioni

$$x(t) = \left[C_1 + C_2 t - \frac{1}{2}\log\left(t^2+9\right) + \frac{1}{3}t\arctan\frac{t}{3}\right]e^{2t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
(b) Imponendo che sia $x(0) = 0$ e $x'(0) = 1$, con facili calcoli si trova $C_1 = \log 3$ e $C_2 = 1$ cosicché la soluzione cercata è

$$x(t) = \left[t + \log\frac{3}{\sqrt{t^2+9}} + \frac{t}{3}\arctan\frac{t}{3}\right]e^{2t}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$