

COGNOME _____
NOME _____
MATRICOLA _____
LAUREA CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC

NON SCRIVERE QUI

1	2	3	4
---	---	---	---

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA
ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2
A.A. 2020-2021 — PARMA, 16 FEBBRAIO 2021

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di tre ore. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli compreso questo dentro ad uno dei fogli protocollo.

Esercizio 1. Siano $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ la funzione vettoriale di componenti $f = (f^1, f^2, f^3)$ definite da

$$f^1(x, y) = x^2 + y^2; \quad f^2(x, y) = -xy; \quad f^3(x, y) = x^3 - y^3;$$

per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ e $g: \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ una funzione differenziabile e siano $h = g \circ f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ la relativa funzione composta e P il punto di coordinate $P = (1, 1)$.

- (a) Calcolate il gradiente della funzione composta $h = g \circ f$ nel punto P .
- (b) Determinate quali condizioni deve verificare la funzione g affinché P sia un punto critico di h .
- (c) Si ha $f(1, 1) = (2, -1, 0)$ e, supponendo che siano $g(2, -1, 0) = 10$ e $\nabla g(2, -1, 0) = (4, 4, 1)$, scrivete l'equazione del piano tangente al grafico di h in P .

Esercizio 2. Sia Γ la curva ottenuta come intersezione tra il paraboloido di equazione $z + 1/2 = x^2 + y^2$ e il piano di equazione $x + y + z = 1$.

- (a) Verificate che Γ è una curva (1-superficie) regolare in \mathbb{R}^3 .
- (b) Calcolate la distanza di Γ dall'asse z .

Esercizio 3. Sia

$$K = \left\{ (x, y, z) : x^2 + y^2 \leq 4, 0 \leq y \leq x/\sqrt{3} \text{ e } 0 \leq z \leq \max \left\{ x^2 + y^2, 2 - \sqrt{x^2 + y^2} \right\} \right\}.$$

- (a) Descrivete e disegnate l'insieme K .
- (b) Calcolate $I = \int_K xy d(x, y, z)$.

Esercizio 4. Determinate la soluzione del seguente problema di Cauchy:

$$\begin{cases} x' = 2t ([x(t)]^2 + x(t)) \\ x(0) = 1. \end{cases}$$