COGNOME	______________________	NON SCRIVERE QUI	
NOME	______________________	1 | 2 | 3 | 4	
MATRICOLA	⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌋		
LAUREA	CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC		

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA
ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI
A.A. 2019-2020 — PARMA, 16 NOVEMBRE 2020

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore e mezza. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Sia $f \in C^\infty(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ il campo vettoriale di componenti

$$f^1(x,y,z) = 2xy^2z + y^2z^3; \qquad f^2(x,y,z) = 2x^2yz + 2xyz^3; \qquad f^3(x,y,z) = 3xy^2z^2;$$

per ogni $x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Determinate una funzione $h\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ tale che il campo vettoriale $g\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di componenti $g^1 = f^1$, $g^2 = f^2$ e $g^3 = f^3 + h$ sia conservativo in $\mathbb{R}^3$ e determinatene un potenziale G;

(b) Calcolate l'integrale curvilineo del campo f lungo la curva

$$\gamma(t) = \left(\mathrm{e}^t \cos^2 t\right) e_1 + \left(\mathrm{e}^{-t}\sqrt{\operatorname{sen} t}\right) e_2 + te_3, \qquad t \in [0,\pi].$$

Soluzione. (a) Poiché $\mathbb{R}^3$ è convesso, determiniamo h imponendo che g risulti irrotazionale. Le derivate in croce delle componenti di g sono

$$\begin{aligned} g^1_y(x,y,z) &= 4xyz + 2yz^3; & g^2_x(x,y,z) &= 4xyz + 2yz^3;\\ g^1_z(x,y,z) &= 3y^2z^2 + 2xy^2; & g^3_x(x,y,z) &= 3y^2z^2 + h_x(x,y,z);\\ g^2_z(x,y,z) &= 6xyz^2 + 2x^2y; & g^3_y(x,y,z) &= 6xyz^2 + h_y(x,y,z); \end{aligned}$$

per ogni (x,y,z) e quindi g risulta irrotazionale se si ha $h_x(x,y,z) = 2xy^2$ e $h_y(x,y,z) = 2x^2y$ per ogni (x,y,z) da cui segue ad esempio $h(x,y,z) = x^2y^2$ per ogni (x,y,z).
In tal caso un potenziale G di g è dato da

$$\begin{aligned} G(x,y,z) &= \int_0^x g^1(t,0,0)\,dt + \int_0^y g^2(x,t,0)\,dt + \int_0^z g^3(x,y,t)\,dt =\\ &= \int_0^z \left(3xy^2t^2 + x^2y^2\right)\,dt = xy^2z^3 + x^2y^2z \end{aligned}$$

per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.
(b) Si ha $f(x,y,z) = g(x,y,z) - h(x,y,z)e_3$ per ogni (x,y,z) e quindi, essendo g conservativo, risulta

$$\int_\gamma f \cdot dl = \int_\gamma g \cdot dl - \int_\gamma (he_3) \cdot dl = -\int_0^\pi \mathrm{e}^{2t} \cos^4 t \mathrm{e}^{-2t} \operatorname{sen} t\,dt = \cdots = -\frac{2}{5}.$$

Esercizio 2. Sia

$$f(x,y) = x^2 + 6xy - 10y^2, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Determinate gli eventuali punti critici di f e stabilitene la natura.

(b) Determinate i massimi ed i minimi globali di f sull'insieme

$$K = \left\{(x,y):\ x^2 - 2xy + 12y^2 \le 33\right\}.$$

Soluzione. (a) La funzione f è un polinomio omogeneo di secondo grado e quindi è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Le sue derivate parziali sono date da

$$f_x(x,y) = 2x + 6y \qquad \text{e} \qquad f_y(x,y) = 6x - 20y$$

per ogni (x,y) e quindi i punti critici sono le soluzioni del sistema lineare formato dalle equazioni $x+3y=0$ e $3x-10y=0$. Poiché il determinante della matrice dei coefficienti del sistema è negativo, l'unico punto critico di f è l'origine $(0,0)$. Le derivate parziali seconde di f sono costanti e la matrice hessiana di f è

$$D^2f(x,y) = \begin{pmatrix} 2 & 6 \\ 6 & -20 \end{pmatrix}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

Avendo tale matrice determinante negativo, l'origine risulta essere punto di sella di f.

(b) L'insieme K è la parte di piano delimitata dall'ellisse di equazione $x^2-2xy+12y^2=33$ i cui assi sono le rette di equazione $(11\pm5\sqrt{5}+2)x+2y=0$ con lunghezza dei semiassi $a=(13\pm5\sqrt{5})/66$. L'insieme K è chiuso perché controimmagine di $(-\infty,33]$ mediante il polinomio $q(x,y)=x^2-2xy+12y^2$, $(x,y)\in\mathbb{R}^2$, ed è limitato poiché risulta

$$33 \ge x^2 - 2xy + 12y^2 \ge x^2 - 2\left(x/\sqrt{2}\right)\left(\sqrt{2}y\right) + 12y^2 \ge x^2/2 + 10y^2 \ge \left(x^2+y^2\right)/2$$

per ogni $(x,y)\in K$. Pertanto K è compatto e quindi f assume minimo e massimo globale su K per il teorema di Weierstrass. L'unico punto critico interno a K è l'origine che è punto di sella. Pertanto, il massimo e il minimo globali di f su K devono essere assunti in punti del bordo ∂K. Poiché il gradiente di q non si annulla su ∂K, il bordo di K è una curva regolare e possiamo quindi cercare il massimo e il minimo di f su ∂K con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Il sistema dei moltiplicatori di Lagrange è

$$\begin{cases} 2x+6y-\lambda(2x-2y)=0 \\ 6x-20y-\lambda(-2x+24y)=0 \\ x^2-2xy+12y^2=33 \end{cases} \iff \begin{cases} (1-\lambda)x+(3+\lambda)y=0 \\ (3+\lambda)x-(10+12\lambda)y=0 \\ x^2-2xy+12y^2=33. \end{cases}$$

Affinché il sistema lineare formato dalle prime due equazioni abbia altre soluzioni oltre alla soluzione $x=y=0$, deve essere

$$\det\begin{pmatrix} 1-\lambda & 3+\lambda \\ 3+\lambda & -(10+12\lambda) \end{pmatrix} = 11\lambda^2 - 8\lambda - 19 = 0$$

e ciò avviene per $\lambda=-1$ e $\lambda=19/11$.

Nel primo caso $\lambda=-1$, le soluzioni delle prime due equazioni del sistema dei moltiplicatori di Lagrnage sono i punti (x,y) tali che $x+y=0$ ovvero $y=-x$. Imponendo che tali punti stiano su ∂K, si trovano i punti $P_\pm=(\pm\sqrt{3},\mp\sqrt{3})$.

Nell'altro caso $\lambda=19/11$, le soluzioni delle prime due equazioni del sistema dei moltiplicatori di Lagrnage sono i punti (x,y) tali che $2x-13y=0$ ovvero $y=2x/13$ e, imponendo che tali punti stiano su ∂K, si trovano i punti $Q_\pm=(\pm13/\sqrt{5},\pm2/\sqrt{5})$.

Risulta infine

$$f(P_\pm) = -33 \qquad \text{e} \qquad f(Q_\pm) = 57.$$

e conseguentemente il minimo globale di f su K è assunto nei punti $P_\pm$ mentre il massimo globale è assunto nei punti $Q_\pm$.

Esercizio 3. Sia

$$K = \left\{ (x\,,y\,,z) : \sqrt{x^2+y^2} \le z \le 2-x \text{ e } x\,,y \ge 0 \right\}.$$

(a) Descrivete l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K 2xyz\, d(x\,,y\,,z)$.

Soluzione. L'insieme K è la parte di spazio con $x\,,y \ge 0$ che si ottiene intersecando il cono $z \ge \sqrt{x^2+y^2}$ con il semispazio $z \le 2-x$. L'insieme K è chiuso poiché intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue ed è limitato poiché deve essere $0 \le x, y, z \le 2$. Esso è quindi compatto e dunque è (Lebesgue) misurabile. Inoltre, la funzione

$$f(x\,,y\,,z) = 2xyz \qquad (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3,$$

è continua e quindi integrabile su ogni insieme compatto e misurabile.
Calcoliamo l'integrale di f su K mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione $\pi_{xy}(K)$ di K sul piano xy è l'insieme

$$\pi_{xy}(K) = \left\{ (x\,,y) : 0 \le y \le 2\sqrt{1-x} \text{ e } 0 \le x \le 1 \right\}$$

e le corrispondenti sezioni $K_{(x,y)}$ sono gli intervalli

$$K_{(x,y)} = \left[\sqrt{x^2+y^2}\,, 2-x \right], \qquad (x\,,y) \in \pi_{xy}(K).$$

Poiché la proiezione $\pi_{xy}(K)$ ed ogni sezione $K_{(x,y)}$ sono insiemi misurabili e compatti ed f è continua su K, per la formula di riduzione si ha

$$\begin{aligned} I = \int_K 2xyz\, dV_3(x\,,y\,,z) &= \int_{\pi_{xy}(K)} \left(\int_{\sqrt{x^2+y^2}}^{2-x} 2xyz\, dz \right) dV_2(x\,,y) = \\ &= \int_{\pi_{xy}(K)} xy \left[4(1-x) - y^2 \right] dV_2(x\,,y) \end{aligned}$$

e per la stessa formula si ha ancora

$$\begin{aligned} \int_{\pi_{xy}(K)} xy \left[4(1-x) - y^2 \right] dV_2(x\,,y) &= \int_0^1 \left(\int_0^{2\sqrt{1-x}} xy \left[4(1-x) - y^2 \right] dy \right) dx = \\ &= \int_0^1 4x(1-x)^2\, dx = \\ &= -\frac{4}{3} x(1-x)^3 \Big|_0^1 + \frac{4}{3} \int_0^1 (1-x)^3\, dx = \frac{1}{3}. \end{aligned}$$

Esercizio 4. Considerate il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{sen}^2 t \\ x(0) = x'(0) = 1. \end{cases}$$

(a) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale.

(b) Determinate la soluzione del problema di Cauchy.

Soluzione. (a) L'equazione proposta è una equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$ le cui soluzioni complesse e coniugate sono $\lambda_\pm = 2 \pm i$. Quindi, le funzioni

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{2t}\cos t; \qquad x_2(t) = \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{sen}\, t;$$

con $t \in \mathbb{R}$ sono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{2t}\cos t + C_2\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{sen}\, t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
Per determinare una soluzione dell'equazione completa procediamo con il metodo della variazione delle costanti arbitrarie cercando una soluzione $x_p(t)$ della forma

$$x_p(t) = c_1(t)\mathrm{e}^{2t}\cos t + c_2(t)\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{sen}\, t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $c_1(t)$ e $c_2(t)$ funzioni da determinare in modo che risulti

$$\begin{cases} c_1'(t)\mathrm{e}^{2t}\cos t + c_2'(t)\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{sen}\, t = 0 \\ c_1'(t)\mathrm{e}^{2t}(2\cos t - \mathrm{sen}\, t) + c_2'(t)\mathrm{e}^{2t}(2\,\mathrm{sen}\, t + \cos t) = \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{sen}^2 t \end{cases}$$

per gli stessi t. Il sistema precedente è equivalente a

$$\begin{cases} c_1'(t) = -\,\mathrm{sen}^3 t = -(1 - \cos^2 t)\,\mathrm{sen}\, t \\ c_2'(t) = \mathrm{sen}^2 t\cos t \end{cases}$$

con $t \in \mathbb{R}$ da cui segue

$$c_1(t) = \cos t - \frac{1}{3}\cos^3 t \quad \text{e} \quad c_2(t) = \frac{1}{3}\,\mathrm{sen}^3 t$$

per gli stessi t a meno di irrilevanti costanti additive. Risulta così

$$x_p(t) = \left(\cos t - \frac{1}{3}\cos^3 t\right)\mathrm{e}^{2t}\cos t + \frac{1}{3}\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{sen}^4 t = \frac{1}{3}\left(1 + \cos^2 t\right)\mathrm{e}^{2t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

e quindi tutte le soluzioni dell'equazione completa sono le funzioni

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{2t}\cos t + C_2\mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{sen}\, t + \frac{1}{3}\left(1 + \cos^2 t\right)\mathrm{e}^{2t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
Alternativamente è possibile procedere cercando una soluzione dell'equazione completa della forma

$$x_p(t) = \left(A\cos^2 t + B\cos t\,\mathrm{sen}\, t + C\,\mathrm{sen}^2 t\right)\mathrm{e}^{2t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con A, B, C costanti da determinare. Risulta $A = 2/3$, $B = 0$ e $C = 1/3$ da cui segue come prima

$$x_p(t) = \frac{1}{3}\left(1 + \cos^2 t\right)\mathrm{e}^{2t}, \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(b) Imponendo che sia $x(0) = x'(0) = 1$, con facili calcoli si trova $C_1 = 1/3$ e $C_2 = -1$ cosicché la soluzione cercata è

$$x(t) = \frac{1}{3}\mathrm{e}^{2t}\left(1 + \cos t + \cos^2 t\right) - \mathrm{e}^{2t}\,\mathrm{sen}\, t, \qquad t \in \mathbb{R}.$$