COGNOME	______________________	NON SCRIVERE QUI
NOME	______________________	1	2	3	4
MATRICOLA	|_|_|_|_|_|_|	
LAUREA	CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC	

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI

A.A. 2019-2020 — PARMA, 8 SETTEMBRE 2020

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore e mezza. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Sia $\gamma\colon [0,1] \to \mathbb{R}^3$ la curva parametrica definita da

$$\gamma(t) = t^3 e_1 + t \operatorname{sen}(2t) e_2 + t\cos(2t) e_3, \qquad 0 \le t \le 1.$$

(a) Calcolate l'integrale curvilineo $\displaystyle\int_\gamma \left(9x + 2\sqrt{y^2+z^2}\right) dl(x,y,z)$.

(b) Dato il campo vettoriale $f\colon \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ di componenti

$$f^1(x,y,z) = y^2 - z^2; \qquad f^2(x,y,z) = 2xy; \qquad f^3(x,y,z) = -2xz;$$

calcolate l'integrale curvilineo $\displaystyle\int_\gamma f(x,y,z)\cdot dl(x,y,z)$.

Soluzione. (a) Si ha

$$\|\gamma'(t)\| = \sqrt{9t^4 + 4t^2 + 1}, \qquad 0 \le t \le 1,$$

e quindi per definizione di integrale curvilineo di una funzione scalare risulta

$$\int_\gamma \left(9x + 2\sqrt{y^2+z^2}\right) dl(x,y) = \int_0^1 \left(9t^3 + 2t\right)\sqrt{9t^4+4t^2+1}\, dt =$$
$$= \frac{1}{6}\left(9t^4+4t^2+1\right)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{1}{6}\left(14\sqrt{14} - 1\right).$$

(b) L'integrale curvilineo del campo vettoriale f lungo la curva γ è

$$\int_\gamma f(x,y,z)\cdot dl(x,y,z) = \int_0^1 \langle f(\gamma(t)) \,|\, \gamma'(t)\rangle\, dt = \cdots =$$
$$= \int_0^1 \left\{3t^4\left[\operatorname{sen}^2(2t) - \cos^2(2t)\right] + 2t^4\left[\operatorname{sen}^3(2t) - \cos^3(2t)\right] + 8t^5 \operatorname{sen}(2t)\cos(2t)\right\} dt$$

che evidentemente è un integrale laborioso da calcolare.
Alternativamente osserviamo che il campo vettoriale f è di classe C^1 in $\mathbb{R}^3$ ed è irrotazionale poiché risulta

$$f^1_y(x,y,z) = 2y = f^2_x(x,y,z); \qquad f^1_z(x,y,z) = -2z = f^3_x(x,y,z); \qquad f^2_z(x,y,z) = 0 = f^3_y(x,y,z);$$

per ogni (x,y,z). Essendo $\mathbb{R}^3$ convesso, f è conservativo ed un suo potenziale è evidentemente dato da

$$F(x,y,z) = x\left(y^2 - z^2\right), \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Risulta quindi

$$\int_\gamma f(x,y,z)\cdot dl(x,y,z) = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)) = F(1, \operatorname{sen} 2, \cos 2) - F(0,0,0) = \operatorname{sen}^2 2 - \cos^2 2.$$

Esercizio 2. Determinate il minimo e il massimo globale di

$$f(x,y) = y\mathrm{e}^{-x/3}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

sull'insieme $\Gamma = \{(x,y) : \ x^2 + 4y^2 = 4\}$.

Soluzione. L'insieme Γ è l'ellisse nel piano avente come assi gli assi coordinati con semiassi di lunghezza 2 e 1 rispettivamente ed è quindi un insieme compatto. La funzione f è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^2$ e dunque assume minimo e massimo globale su Γ per il teorema di Weierstrass. Poiché Γ è una curva regolare nel piano, possiamo determinare il minimo globale e il massimo globale di f su Γ con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Il sistema dei moltiplicatori di Lagrange è

$$\begin{cases} -\dfrac{1}{3}y\mathrm{e}^{-x/3} - 2\lambda x = 0 \\ \mathrm{e}^{-x/3} - 8\lambda y = 0 \\ x^2 + 4y^2 = 4. \end{cases}$$

Dalla seconda equazione si ricava che deve essere $\mathrm{e}^{-x/3} = 8\lambda y$ che, sostituito nella prima equazione, porta a

$$-\frac{8}{3}\lambda y^2 - 2\lambda x = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad y^2 = -3x/4$$

poiché deve essere $\lambda \neq 0$. Sostituendo nell'equazione che definisce Γ si trova l'equazione

$$x^2 - 3x - 4 = (x+1)(x-4) = 0$$

le cui soluzioni sono evidentemente $x = -1$ e $x = 4$. Da $y^2 = -3x/4$ segue che deve essere $x = -1$ cui corrispondono $y = \pm\sqrt{3}/2$.
Il massimo e il minimo globale di f devono essere assunti nei punti di coordinate $P_\pm = (-1, \pm\sqrt{3}/2)$ e chiaramente risulta

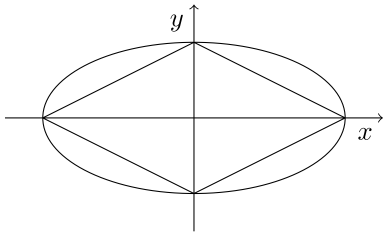
$$\min_\Gamma f = f(P_-) = -\frac{\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{\mathrm{e}}} \qquad \text{e} \qquad \max_\Gamma f = f(P_+) = \frac{\sqrt{3}}{2\sqrt[3]{\mathrm{e}}}.$$

Esercizio 3. Sia
$$K = \{(x,y,z) : \; |x| + 2|y| \le 2 \text{ e } 0 \le z \le 4 - x^2 - 4y^2\}.$$

(a) Descrivete e disegnate l'insieme K.

(b) Calcolate la misura $|K|$ di K.

Soluzione. L'insieme K è formato dai punti di coordinate (x,y,z) compresi tra il paraboloide a sezione ellittica di equazione $z = 4 - x^2 - 4y^2$ e il piano $z = 0$ aventi proiezione sul piano $z = 0$ contenuta nel parallelogramma $|x| + 2|y| = 2$. Come rappresentato nella figura sottostante, tale parallelogramma è iscritto nell'ellisse di equazione $x^2+4y^2 = 4$ che è l'intersezione tra il paraboloide e il piano $z = 0$. L'insieme K ha quindi la forma di una tenda a pianta ellittica picchettata ai quattro vertici del parallelolgramma.



L'insieme K è compatto perché è limitato ($|x| \le 2$, $|y| \le 1$ e $0 \le z \le 4$) ed è intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue e quindi è (Lebesgue) misurabile.
Calcoliamo la misura $|K|$ di K mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione di K sul piano z è il parallelogramma
$$\pi_{xy}(K) = \{(x,y) : \; |x| + 2|y| \le 2\}$$
rappresentato nella figura precedente poiché risulta
$$|x| + 2|y| \le 2 \qquad \Longrightarrow \qquad 4 \ge (|x| + 2|y|)^2 = x^2 + 4|x||y| + 4y^2 \ge x^2 + 4y^2$$
e per ogni $(x,y) \in \pi_{xy}(K)$ la corrispondente sezione è l'intervallo
$$K^z = [0, 4 - x^2 - 4y^2].$$

Per la formula di riduzione si ha allora
$$\begin{aligned} |K| = \int_K 1 \, dm_3(x,y,z) &= \int_{\pi_{xy}(K)} (4 - x^2 - 4y^2) \, dm_2(x,y) = \\ &= 4 \int_0^1 \left(\int_0^{2-2y} (4 - x^2 - 4y^2) \, dx \right) dy = \\ &= 4 \int_0^1 \left(4(1 - y^2)\, x - \frac{x^3}{3} \right) \Big|_0^{2(1-y)} dy = \cdots = \frac{32}{3}. \end{aligned}$$

Esercizio 4. Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = (\operatorname{sen} t)x(t) - 2t\mathrm{e}^{\cos t}[x(t)]^2 \\ x(\pi) = \mathrm{e}. \end{cases}$$

Soluzione. L'equazione differenziale proposta è un'equazione di Bernoulli. La funzione a secondo membro è

$$f(t,x) = (\operatorname{sen} t)x - 2t\mathrm{e}^{\cos t}x^2, \qquad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

ed è di classe $f \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Conseguentemente, il problema di Cauchy considerato ha soluzione massimale $x \in C^\infty(\alpha,\beta)$ con $-\infty \le \alpha = \alpha(x_0) < \pi < \beta = \beta(x_0) \le +\infty$. Tale soluzione è prolungamento di ogni altra soluzione del medesimo problema di Cauchy.
Poiché la soluzione del medesimo problema di Cauchy con dato iniziale $x_0 = 0$ è la funzione identicamente nulla $x(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, la soluzione massimale del problema di Cauchy considerato verifica la condizione $x(t) > 0$ per ogni $t \in (\alpha,\beta)$. La funzione

$$y(t) = [x(t)]^\lambda, \qquad t \in (\alpha,\beta),$$

con $\lambda \neq 0$ da determinare è di classe $C^\infty(\alpha,\beta)$ e, essendo $x(t)$ soluzione del problema di Cauchy considerato con $x(t) > 0$ per ogni $t \in (\alpha,\beta)$, risulta

$$\begin{aligned} y'(t) = \lambda[x(t)]^{\lambda-1}x'(t) = \lambda[x(t)]^{\lambda-1}\left\{(\operatorname{sen} t)x(t) - 2t\mathrm{e}^{\cos t}[x(t)]^2\right\} = \\ = \lambda(\operatorname{sen} t)y(t) - 2t\lambda\mathrm{e}^{\cos t}[x(t)]^{\lambda+1} \end{aligned}$$

con $y(t) > 0$ per ogni $t \in (\alpha,\beta)$. Scegliendo $\lambda = -1$, la funzione $y(t)$ per $t \in (\alpha,\beta)$ risulta essere soluzione positiva del problema di Cauchy

$$\begin{cases} z'(t) = -(\operatorname{sen} t)z(t) + 2t\mathrm{e}^{\cos t} \\ z(\pi) = 1/\mathrm{e}. \end{cases}$$

La soluzione di tale problema è

$$z(t) = \mathrm{e}^{\cos t+1}\left\{\frac{1}{\mathrm{e}} + \int_\pi^t \frac{2s}{\mathrm{e}}\,ds\right\} = \mathrm{e}^{\cos t}\left(t^2 + 1 - \pi^2\right), \qquad t \in \mathbb{R},$$

e quindi $y(t)$ coincide con $z(t)$ sull'intervallo aperto (α,β) contenente π in cui risulta $z(t) > 0$. Risolvendo tale disequazione si trova

$$y(t) = \mathrm{e}^{\cos t}\left[t^2 - \left(\pi^2 - 1\right)\right], \qquad t > \sqrt{\pi^2 - 1},$$

e quindi la soluzione massimale del problema di Cauchy proposto è

$$x(t) = \frac{1}{\mathrm{e}^{\cos t}\left[t^2 - (\pi^2 - 1)\right]}, \qquad t > \sqrt{\pi^2 - 1}.$$