COGNOME ______	NON SCRIVERE QUI
NOME ______	1 | 2 | 3 | 4
MATRICOLA ______	
LAUREA CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC	

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI

A.A. 2019-2020 — PARMA, 3 LUGLIO 2020

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore e mezza. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Siano $\Phi, \varphi \in C^1(\mathbb{R}^2)$ due funzioni e sia $f \in C^1(\mathbb{R}^2)$ la funzione definita da

$$f(x,y) = \Phi\big(y\varphi(x,y), x[1+\varphi(x,y)]\big), \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

(a) Calcolate per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ il gradiente $\nabla f(x,y)$.

(b) Sapendo che è

$$\varphi(0,0) = 1; \qquad \Phi(0,0) = 1; \qquad \nabla\Phi(0,0) = (\pi, 1);$$

determinate l'equazione del piano tangente al grafico della funzione f nel punto $(0,0)$.

Soluzione. (a) Denotiamo con $\Phi(u,v)$ le variabili di Φ. Per la regola di derivazione delle funzioni composte si ha

$$f_x(x,y) = \Phi_u\big(y\varphi(x,y), x[1+\varphi(x,y)]\big)\, y\varphi_x(x,y) + \Phi_v\big(y\varphi(x,y), x[1+\varphi(x,y)]\big)\,[1+\varphi(x,y)+x\varphi_x(x,y)];$$
$$f_y(x,y) = \Phi_u\big(y\varphi(x,y), x[1+\varphi(x,y)]\big)\,[\varphi(x,y)+y\varphi_y(x,y)] + \Phi_v\big(y\varphi(x,y), x[1+\varphi(x,y)]\big)\, x\varphi_y(x,y)];$$

per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$.
(b) Per (a) le derivate parziali di Φ in $(0,0)$ sono date da

$$f_x(0,0) = \Phi_v(0,0)[1+\varphi(0,0)] = 2;$$
$$f_y(0,0) = \Phi_u(0,0)\varphi(0,0) = \pi;$$

e risulta $f((0,0) = \Phi(0,0) = 1$. Pertanto, l'equazione del piano tangente al grafico di f in $(0,0)$ è

$$z = 1 + 2x + \pi y.$$

Esercizio 2. Sia

$$f(x,y,z) = x^4 + z^4 - 2x^2 + y^2 - z^2 - 2yz, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Determinate gli eventuali punti critici di f e stabilitene la natura.

(b) Determinate l'immagine $f(\mathbb{R}^3)$.

Soluzione. (a) La funzione f è un polinomio e quindi è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^3)$. Le derivate parziali di f sono date da

$$f_x(x,y) = 4x^3 - 4x; \qquad f_y(x,y) = 2y - 2z; \qquad f_z(x,y) = 4z^3 - 2z - 2y$$

per ogni (x,y,z) e quindi i punti critici sono le soluzioni del sistema formato dalle equazioni

$$\begin{cases} x\left(x^2-1\right) = 0 \\ y = z \\ 4z^3 - 2z - 2y = 0 \end{cases} \qquad \iff \qquad \begin{cases} x\left(x^2-1\right) = 0 \\ y = z \\ z\left(z^2-1\right) = 0 \end{cases}$$

cui corrispondono i punti di coordinate

$$(0,0,0); \qquad (0,\pm1,\pm1); \qquad (\pm1,0,0); \qquad (\pm1,\sigma,\sigma) \quad (\sigma \in \{\pm1\}).$$

La funzione f ha dunque nove punti critici. Poiché f è pari in x e risulta $f(x,-y,-z) = f(x,y,z)$, punti critici con segno opposto di x o della coppia (x,y) hanno la stessa natura.
La matrice hessiana di f è

$$D^2f(x,y,z) = \begin{pmatrix} 12x^2-4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 12z^2-2 \end{pmatrix}$$

per ogni $(x,-y,-z)$. Poiché D^2f si scrive a blocchi, risulta

$$D^2f(0,0,0) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{un autovalore positivo e due negativi} \qquad \Longrightarrow \qquad \text{selle;}$$

$$D^2f(0,\pm1,\pm1) = \begin{pmatrix} -4 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 10 \end{pmatrix} \qquad \text{due autovalori positivi e uno negativo} \qquad \Longrightarrow \qquad \text{selle;}$$

$$D^2f(\pm1,0,0) = \begin{pmatrix} 8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & -2 \end{pmatrix} \qquad \text{un autovalore positivo e due negativi} \qquad \Longrightarrow \qquad \text{selle;}$$

$$D^2f(\pm1,\sigma,\sigma) = \begin{pmatrix} -8 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -2 \\ 0 & -2 & 10 \end{pmatrix} \qquad \text{tre autovalori positivi} \qquad \Longrightarrow \qquad \text{minimi.}$$

(b) Dalla disuguaglianza $ab \geq -(a^2+b^2)/2$ con $a = y$ e $b = 2z$ segue

$$f(x,y,z) \geq x^4 + z^4 - 2x^2 + y^2/2 - 3z^2$$

per ogni (x,y,z). Poiché risulta

$$x^4 - 2x^2 \geq x^2 + c_1 \qquad \text{e} \qquad z^4 - 3z^2 \geq z^2 + c_2$$

per ogni x e z per $c_1 = -9/4$ e $c_2 = -4$, si conclude che risulta

$$f(x,y,z) \geq x^2 + y^2/2 + z^2 - 25/4, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

Si ha quindi

$$\lim_{(x,y,z)\to\infty} f(x,y,z) = +\infty$$

e dunque f ammette minimo globale per il teorema di Weierstrass generalizzato. Per (a) il minimo globale è assunto nei punti di coordinate $(\pm1,\sigma,\sigma)$ con $\sigma = \pm1$ da cui segue

$$f(\mathbb{R}^3) = [f(\pm1,\sigma,\sigma), +\infty) = [-2, +\infty)$$

per il teorema dei valori intermedi.

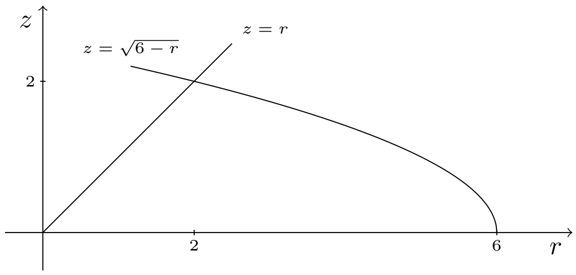
Esercizio 3. Sia

$$K = \left\{(x, y, z) : 0 \le y \le x/\sqrt{3},\ z^2 \le \min\left\{x^2 + y^2, 6 - \sqrt{x^2+y^2}\right\} \text{ e } z \ge 0\right\}.$$

(a) Descrivete e disegnate l'insieme K.

(b) Calcolate $\displaystyle\int_K z\, dm_3(x, y, z)$.

Soluzione. L'insieme K è l'intersezione del poliedro definito da $0 \le y \le x/\sqrt{3}$ e $z = 0$ con il solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la figura contenuta nel primo quadrante del piano rz (con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$) compresa tra l'asse delle ascisse, la retta $r = z$ e il grafico della funzione $z = \sqrt{6 - r}$ per $0 \le r \le 6$ come illustrato nella figura seguente. L'intersezione tra i due grafici si ha per $r = z = 2$.



L'insieme K è compatto perché è limitato ed è intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue e quindi è (Lebesgue) misurabile. La funzione f definita da

$$f(x, y, z) = z, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

è un polinomio e quindi è integrabile in K.
Calcoliamo I mediante la formula di riduzione per strati. La proiezione di K sull'asse z è l'intervallo

$$\pi_z(K) = [0, 2]$$

e per ogni $z \in [0, 2]$ la corrispondente sezione è la porzione di corona circolare

$$K^z = \left\{(x, y) : 0 \le y \le x/\sqrt{3} \text{ e } z \le \sqrt{x^2 + y^2} \le 6 - z^2\right\}.$$

Per la formula di riduzione si ha allora

$$I = \int_0^2 z \left(\int_{K^z} 1\, dm_2(x, y)\right) dz = \int_0^2 z|K^z|\, dz$$

e, utilizzando coordinate polari nel piano abbinate nuovamente alla formula di riduzione, per ogni $z \in [0, 2]$ risulta

$$|K^z| = \int_0^{\pi/6} 1\, d\theta \int_z^{6-z^2} r\, dr = \frac{\pi}{12} r^2\Big|_z^{6-z^2} = \frac{\pi}{12}\left[\left(6 - z^2\right)^2 - z^2\right].$$

Conseguentemente risulta

$$I = \frac{\pi}{12}\int_0^2 z\left[\left(6 - z^2\right)^2 - z^2\right] dz = \left(-\frac{\pi}{72}\left(6 - z^2\right)^3 - \frac{\pi}{24} z^2\right)\Big|_0^2 = \cdots = \frac{23}{9}\pi.$$

Esercizio 4. Sia

$$\begin{cases} x''(t) + 9x(t) = 0 \\ x(\pi/12) = \sqrt{2} \text{ e } x'(\pi/12) = \sqrt{2}. \end{cases}$$

(a) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea.

(b) Determinate tutte le soluzioni del problema di Cauchy.

(c) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale non omogenea

$$x''(t) + 9x(t) = 9\cos(3t)\,\mathrm{sen}\,(3t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

Soluzione. (a) L'equazione proposta è una equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è $\lambda^2+9=0$ le cui soluzioni complesse coniugate sono $\lambda = \pm 3i$. Quindi, le funzioni

$$x_1(t) = \cos(3t); \qquad x_2(t) = \mathrm{sen}\,(3t);$$

con $t \in \mathbb{R}$ sono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni

$$x(t) = C_1\cos(3t) + C_2\,\mathrm{sen}\,(3t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
(b) Scegliamo le costanti $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ in modo che la soluzione $x(t)$ definita in (a) verifichi le condizioni $x(\pi/12) = x'(\pi/12) = \sqrt{2}$. Si ha

$$\begin{cases} x(\pi/12) = (C_1 + C_2)/\sqrt{2} = \sqrt{2} \\ x'(\pi/12) = 3(-C_1 + C_2)/\sqrt{2} = \sqrt{2} \end{cases}$$

da cui segue $C_1 = 2/3$ e $C_2 = 4/3$. La soluzione cercata è dunque la funzione

$$x(t) = \frac{2}{3}\cos(3t) + \frac{4}{3}\,\mathrm{sen}\,(3t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(c) Poiché il termine non omogeneo dell'equazione è il prodotto di seni e coseni e nell'equazione non compare x', è possibile cercare una soluzione dell'equazione completa della forma

$$x_p(t) = A\cos(3t)\,\mathrm{sen}\,(3t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $A \in \mathbb{R}$ costante da determinare. Si ha allora

$$x_p''(t) + 9x_p(t) = -27A\cos(3t)\,\mathrm{sen}\,(3t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

da cui segue $A = -1/3$.
Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione completa sono le funzioni

$$x(t) = C_1\cos(3t) + C_2\,\mathrm{sen}\,(3t) - \frac{1}{3}\cos(3t)\,\mathrm{sen}\,(3t) \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
Alternativamente, si ha per la formula di duplicazione del seno

$$9\cos(3t)\,\mathrm{sen}\,(3t) = \frac{9}{2}\,\mathrm{sen}\,(6t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

e si può cercare una soluzione della forma $x_p(t) = A\cos(6t) + B\,\mathrm{sen}\,(6t)$ con $t \in \mathbb{R}$ e A, B costanti da determinare.