COGNOME	______________________	NON SCRIVERE QUI
NOME	______________________	1 | 2 | 3 | 4
MATRICOLA	________	
LAUREA	CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC	

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA
DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA
ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI
A.A. 2019-2020 — PARMA, 10 GIUGNO 2020

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore e mezza. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Sia $\gamma\colon [-1,1] \to \mathbb{R}^3$ la curva parametrica definita da

$$\gamma(t) = t^2 e_1 + t^4 e_2 + t^6 e_3, \qquad |t| \le 1.$$

(a) Determinate per quali valori del parametro $\lambda \in \mathbb{R}$ il campo vettoriale $f_\lambda \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ di componenti $f_\lambda = (f_\lambda^1, f_\lambda^2, f_\lambda^3)$ definite da

$$f_\lambda^1(x,y,z) = 2xy; \qquad f_\lambda^2(x,y,z) = \lambda x^2; \qquad f_\lambda^3(x,y,z) = e^{z^2};$$

per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ è conservativo.

(b) Calcolate per ogni λ l'integrale curvilineo $\displaystyle\int_\gamma f_\lambda \cdot dl$.

(c) Calcolate l'integrale curvilineo $\displaystyle\int_\gamma (2x + 9z)\, dl(x,y)$.

Soluzione. (a) Poiché $\mathbb{R}^3$ è convesso ed il campo vettoriale f_λ è di classe C^1 in $\mathbb{R}^3$, esso è conservativo se e solo se è irrotazionale. Le derivate parziali miste delle componenti di f_λ sono date da

$$\begin{aligned} \partial_y f_\lambda^1(x,y,z) &= 2x \\ \partial_x f_\lambda^2(x,y,z) &= 2\lambda x \end{aligned} \qquad \text{e} \qquad \partial_x f_\lambda^3(x,y,z) = \partial_z f_\lambda^1(x,y,z) = \partial_z f_\lambda^2(x,y,z) = \partial_y f_\lambda^3(x,y,z) = 0$$

per ogni (x,y,z) e quindi risulta $\partial_y f_\lambda^1 = \partial_x f_\lambda^2$, $\partial_z f_\lambda^1 = \partial_x f_\lambda^3$ e $\partial_z f_\lambda^2 = \partial_y f_\lambda^3$ in $\mathbb{R}^3$ se e solo se è $\lambda = 1$. Per tale scelta di λ un potenziale del campo vettoriale f_1 è la funzione

$$F(x,y,z) = x^2 y + \int_0^z e^{t^2}\, dt, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(b) Per definizione di integrale curvilineo di un campo vettoriale si ha

$$\int_\gamma f_\lambda \cdot dl = \int_{-1}^1 \langle f_\lambda(\gamma(t)) \,|\, \gamma'(t) \rangle\, dt = \cdots = \int_{-1}^1 \left[4(1+\lambda)t^7 + 6t^5 e^{t^{12}} \right] dt = 0$$

per ogni λ poiché la funzione integranda è dispari e l'intervallo di integrazione è simmetrico rispetto all'origine.

(c) Per definizione di integrale curvilineo di una funzione scalare si ha

$$\int_\gamma (2x + 9z)\, dl(x,y) = \int_{-1}^1 \left(2t^2 + 9t^6\right) \sqrt{4t^2 + 16t^6 + 36t^{10}}\, dt = \cdots =$$

$$= \frac{1}{2} \int_0^1 \left(16t^3 + 72t^7\right) \sqrt{1 + 4t^4 + 9t^8}\, dt = \frac{1}{3} \left(1 + 4t^4 + 9t^8\right)^{3/2} \Big|_0^1 = \frac{1}{3} \left(14\sqrt{14} - 1\right).$$

Esercizio 2. Sia

$$f(x,y) = \frac{x^4}{4} + \frac{y^3}{3} + 2x^2y - 9y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Determinate gli eventuali punti critici di f e stabilitene la natura.

(b) Determinate massimo e minimo globali di f sull'insieme $K = \{(x,y) : 0 \leq x, y \leq 3\}$;

(c) Determinate l'insieme immagine $f(K)$.

Soluzione. (a) La funzione f è un polinomio e quindi è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Le derivate parziali di f sono date da

$$f_x(x,y) = x^3 + 4xy \qquad \text{e} \qquad f_y(x,y) = y^2 + 2x^2 - 9$$

per ogni (x,y) e quindi i punti critici sono le soluzioni del sistema di equazioni

$$\begin{cases} x(x^2+4y) = 0 \\ y^2 + 2x^2 - 9 = 0 \end{cases}$$

Dalla prima equazione si deduce che deve essere $x = 0$ oppure $y = -x^2/4$. Sostituendo nella seconda equazione, nel primo caso si trova $y = \pm 3$ e nel secondo si trova l'equazione biquadratica $x^4 + 32x^2 - 144 = (x^2+36)(x^2-4) = 0$ cui corrisponde $x = \pm 2$ e $y = -1$. Pertanto i punti critici di f sono i punti di coordinate $P_\pm = (0, \pm 3)$ e $Q_\pm = (\pm 2, -1)$.
Le derivate seconde di f sono

$$f_{xx}(x,y) = 3x^2 + 4y; \qquad f_{yy}(x,y) = 2y; \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 4x;$$

per ogni (x,y) e conseguentemente la matrice hessiana di f in $P_\pm$ e $Q_\pm$ è

$$D^2 f(P_\pm) = \begin{pmatrix} \pm 12 & 0 \\ 0 & \pm 6 \end{pmatrix} \qquad \text{e} \qquad D^2 f(Q_\pm) = \begin{pmatrix} 8 & \pm 8 \\ \pm 8 & -2 \end{pmatrix}.$$

Dall'esame del determinante e della traccia si conclude che P_+ è punto di minimo locale, P_- è punti di massimo locale e i punti $Q_\pm$ sono punti di sella.
(b) L'insieme K è il quadrato compatto di vertici $(0,0)$, $(3,0)$, $(3,3)$ e $(0,3)$ e la funzione f assume quindi minimo e massimo globale su K per il teorema di Weierstrass. Poiché i punti critici di f interni a K sono punti di sella, i punti di minimo e di massimo globale di f su K devono essere assunti sul bordo di K.
Le restrizioni di f alle curve parametriche semplici i cui sostegni formano il bordo di K sono

$$\begin{aligned} f_1(t) &= f(t,0) = t^4/4, && 0 \leq t \leq 3; \\ f_2(t) &= f(3,t) = t^3/3 + 9t + 81/4, && 0 \leq t \leq 3; \\ f_3(t) &= f(3-t,3) = (3-t)^4/4 + 6(3-t) - 18, && 0 \leq t \leq 3; \\ f_4(t) &= f(0,3-t) = (3-t)^3/3 - 9(3-t), && 0 \leq t \leq 3. \end{aligned}$$

Studiando l'andamento delle funzioni f_i nei rispettivi domini si ricava che f_1, f_2 e f_4 sono strettamente crescenti mentre f_3 è strettamente decrescente. Conseguentemente, il minimo globale di f in K è assunto nel punto $P_+ = (0,3)$ ed il massimo globale nel punti $R = (3,3)$. Risulta quindi

$$\min_K f = f(0,3) = -18 \qquad \text{e} \qquad \max_K f = f(3,3) = 63/4.$$

(c) L'insieme K è convesso. Per il teorma dei valori intermedi si ha dunque $f(K) = [-18, 63/4]$.

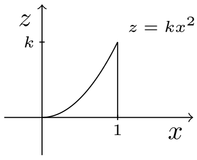
Esercizio 3. Sia S_k l'insieme di $\mathbb{R}^3$ contenuto nel piano $y = 0$ definito da

$$S_k = \left\{(x, y, z) : \ 0 \le z \le kx^2, \ y = 0 \text{ e } 0 \le x \le 1\right\} \qquad (k > 0).$$

(a) Determinate $k > 0$ in modo che le misure dei solidi di rotazione E e F ottenuti facendo ruotare S_k rispettivamente attorno agli assi x e z siano uguali.

(b) Per $k > 0$ calcolate $I_E = \displaystyle\int_E z \, dm_3(x, y, z)$ e $I_F = \displaystyle\int_E x \, dm_3(x, y, z)$.

Soluzione. L'insieme S_k è la porzione del piano xz compresa tra l'asse delle ascisse e la parabola di equazione $z = kx^2$ nell'intervallo $0 \le x \le 1$ come illustrato nella figura seguente ($k = 1$).



Gli insiemi E ed F sono i solidi di rotazione che si ottengono facendo ruotare l'insieme S_k rispettivamente attorno agli assi x e z:

$$E = \left\{(x, y, z) : \ 0 \le z \le k(x^2 + y^2) \text{ e } x^2 + y^2 \le 1\right\};$$
$$F = \left\{(x, y, z) : \ z^2 + y^2 \le k \text{ e } \sqrt{y^2 + z^2}/k \le x \le 1\right\}.$$

Gli insiemi E ed F sono evidentemente compatti perché limitati e definiti come intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue e come tali sono entrambi (Lebesgue) misurabili. Calcoliamo la misura di E mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione di E sul piano xy è il cerchio

$$\pi_{xy}(E) = \left\{(x, y) : \ x^2 + y^2 \le 1\right\}$$

e per ogni $(x, y) \in \pi_{xy}(E)$ la corrispondente sezione è l'intervallo $E_{(x,y)} = [0, k(x^2 + y^2)]$. Per la formula di riduzione abbinata a coordinate polari nel piano si ha allora

$$|E| = \int_{\pi_{xy}(E)} k(x^2 + y^2) \, dm_2(x, y) = 2\pi \int_0^1 kr^3 \, dr = k\frac{\pi}{2}.$$

Calcoliamo quindi la misura di F mediante la formula di riduzione per strati rispetto all'asse x. La proiezione di F sull'asse x è l'intervallo $[0, 1]$ e per ogni $x \in [0, 1]$ la corrispondente sezione è

$$F_x = \left\{(y, z) : \ \sqrt{y^2 + z^2} \le kx^2\right\}.$$

Per avere l'uguaglianza $|E| = |F|$ deve quindi essere $k = 5/2$.

(b) Le funzioni f e g definite da

$$f(x, y, z) = z \qquad \text{e} \qquad g(x, y, z) = x$$

per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sono lineari e quindi integrabili in ogni insieme compatto. Procedendo come in (a) per fili per I_E e per strati per I_F risulta

$$I_E = \int_{\pi_{xy}(E)} \left(\int_0^{k(x^2+y^2)} z \, dz\right) dm_2(x, y) = 2\pi \int_0^1 r \left.\frac{z^2}{2}\right|_0^{kr^2} dr = k^2\pi \int_0^1 r^5 \, dr = k^2\frac{\pi}{6};$$
$$I_F = \int_0^1 \left(\int_{F_x} x \, dm_2(y, z)\right) dx = k^2\pi \int_0^1 x^5 \, dx = k^2\frac{\pi}{6}.$$

Esercizio 4. Sia

$$\begin{cases} x''(t) - 2x'(t) + 10x(t) = 0 \\ x(0) = 1 \text{ e } x'(0) = 0. \end{cases}$$

(a) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale omogenea.

(b) Determinate tutte le soluzioni del problema di Cauchy.

(c) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale non omogenea

$$x''(t) - 2x'(t) + 10x(t) = \frac{3\mathrm{e}^t}{\operatorname{sen}(3t)}, \qquad 0 < t < \pi/3.$$

Soluzione. (a) L'equazione proposta è una equazione differenziale lineare del secondo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è $\lambda^2-2\lambda+10 = 0$ le cui soluzioni complesse e coniugate sono $\lambda = 1\pm 3i$. Quindi, le funzioni

$$x_1(t) = \mathrm{e}^t \cos(3t); \qquad x_2(t) = \mathrm{e}^t \operatorname{sen}(3t);$$

con $t \in \mathbb{R}$ sono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^t \cos(3t) + C_2\mathrm{e}^t \operatorname{sen}(3t), \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
(b) Scegliamo le costanti $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ in modo che la soluzione $x(t)$ definita in (a) sia tale che $x(0) = 1$ e $x'(0) = 0$. Si ha

$$\begin{cases} x(0) = C_1 = 1 \\ x'(0) = C_1 + 3C_2 = 0 \end{cases}$$

da cui segue $C_1 = 1$ e $C_2 = -1/3$ e quindi la soluzione del problema di Cauchy considerato è la funzione

$$x(t) = \mathrm{e}^t \cos(3t) - \frac{1}{3}\mathrm{e}^t \operatorname{sen}(3t), \qquad t \in \mathbb{R}.$$

(c) Procediamo con il metodo delle costanti arbitrarie cercando una soluzione dell'equazione completa $x_p(t)$, $t \in \mathbb{R}$, della forma

$$x_p(t) = c_1(t)\mathrm{e}^t \cos(3t) + c_2(t)\mathrm{e}^t \operatorname{sen}(3t), \qquad |t|\pi/3,$$

con $c_1(t)$ e $c_2(t)$ funzioni da determinare in modo che che risulti

$$\begin{cases} c_1'(t)\mathrm{e}^t \cos(3t) + c_2'(t)\mathrm{e}^t \operatorname{sen}(3t) = 0 \\ c_1'(t)\left[\mathrm{e}^t \cos(3t) - 3\mathrm{e}^t \operatorname{sen}(3t)\right] + c_2'(t)\left[\mathrm{e}^t \operatorname{sen}(3t) + 3\mathrm{e}^t \cos(3t)\right] = \dfrac{3\mathrm{e}^t}{\operatorname{sen}(3t)} \end{cases}$$

per gli stessi t. Il sistema precedente è equivalente a

$$\begin{cases} c_1'(t)\cos(3t) + c_2'(t)\operatorname{sen}(3t) = 0 \\ c_1'(t)\operatorname{sen}(3t) - c_2'(t)\cos(3t) = -\dfrac{1}{\operatorname{sen}(3t)} \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} c_1'(t) = -1 \\ c_2'(t) = \dfrac{\cos(3t)}{\operatorname{sen}(3t)} \end{cases}$$

con $|t| < \pi/3$ da cui segue

$$c_1(t) = -t \qquad \text{e} \qquad c_2(t) = \frac{1}{3}\log\big(\operatorname{sen}(3t)\big)$$

per gli stessi t. Risulta così

$$x_p(t) = -t\mathrm{e}^t \cos(3t) + \frac{1}{3}\log(\operatorname{sen}(3t))\mathrm{e}^t \operatorname{sen}(3t), \qquad |t| < \pi/3,$$

e quindi tutte le soluzioni dell'equazione completa sono le funzioni

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^t \cos(3t) + C_2\mathrm{e}^t \operatorname{sen}(3t) - t\mathrm{e}^t \cos(3t) + \frac{1}{3}\log\big(\operatorname{sen}(3t)\big)\mathrm{e}^t \operatorname{sen}(3t), \qquad |t| < \pi/3,$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.