Cognome	________________________	Non scrivere qui
Nome	________________________	1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6
Matricola	|_|_|_|_|_|_|	
Laurea	Civ Amb Gest Inf Eln Tlc Mec	

Università degli Studi di Parma

Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Esame di Analisi Matematica 2 — Soluzioni

A.A. 2019-2020 — Parma, 18 Febbraio 2020

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore e mezza. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. La lunghezza L della curva parametrica $\gamma(t) = t^2 e_1 + 2t^3 e_2$, $t \in [1, \sqrt{3}]$, è

(a) $L = \dfrac{2}{27}\left(28^{3/2} - 10^{3/2}\right)$; (b) $L = \sqrt{28} - \sqrt{10}$; (c) $L = \dfrac{2}{3}\left(28^{3/2} - 10^{3/2}\right)$.

Soluzione. Poiché la curva γ è liscia, risulta

$$L(\gamma) = \int_1^{\sqrt{3}} \|\gamma'(t)\|\, dt = \int_1^{\sqrt{3}} \sqrt{4t^2 + 36t^4}\, dt = \int_1^3 \sqrt{1+9s}\, ds = \frac{2}{27}(1+9s)^{3/2}\Big|_0^3 = \frac{2}{27}\left(28^{3/2} - 10^{3/2}\right).$$

La risposta corretta è quindi (a).

Esercizio 2. Quale delle seguenti funzioni non è differenziabile in ogni punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$?

(a) $f(x, y) = |x-1|^{3/2} y$; (b) $g(x, y) = \mathrm{e}^{|x-y|}$; (c) $h(x, y) = \cos(|xy|)$.

Soluzione. La funzione g non ha derivate parziali nei punti (t, t) della bisettrice del primo e terzo quadrante poiché si ha

$$\lim_{h\to 0^\pm} \frac{g(t+h, t) - g(t, t)}{h} = \lim_{h\to 0^\pm} \frac{g(t, t+h) - g(t, t)}{h} = \lim_{h\to 0^\pm} \frac{\mathrm{e}^{|h|} - 1}{h} = \pm 1$$

per ogni $t \in \mathbb{R}$ mentre le funzioni f e h sono in effetti di classe C^1 in $\mathbb{R}^2$. La risposta corretta è quindi (b).

Esercizio 3. La funzione $f(x, y) = x^2 - 4y^2 - 4x - 8y$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ ha

(a) un punto di minimo locale stretto; (b) un punto di sella; (c) due punti critici.

Soluzione. La funzione f è un polinomio le cui derivate parziali sono $f_x(x, y) = 2x - 4$ e $f_y(x, y) = -8y - 8$ per ogni (x, y). L'unico punto critico di f è quindi il punto di coordinate $(2, -1)$ e in tale punto la matrice hessina di f è la matrice diagonale

$$D^2 f(2, -1) = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -8 \end{pmatrix}$$

i cui autovalori sono $\lambda = 2$ e $\lambda = -8$. Conseguentemente il punto di coordinate $(2, -1)$ è un punto di sella di f. La risposta corretta è quindi (b).

Esercizio 4. Sia $\lambda \in \mathbb{R}$ e sia $f_\lambda \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$, $f_\lambda = (f_\lambda^1, f_\lambda^2, f_\lambda^3)$ il campo vettoriale di componenti

$$f_\lambda^1(x,y,z) = 3x^2y^2z + yz^2; \qquad f_\lambda^2(x,y,z) = 2x^3yz + xz^2; \qquad f_\lambda^3(x,y,z) = x^3y^2 + \lambda xyz;$$

per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$.

(a) Determinate per quali $\lambda \in \mathbb{R}$ il campo vettoriale f_λ è conservativo in $\mathbb{R}^2$ e per tali λ determinate un potenziale di f_λ.

(b) Per λ determinato in (a) calcolate l'integrale curvilineo di f_λ lungo la curva parametrica

$$\gamma(t) = \log(1+t)e_1 + \frac{2t}{1+t^2}e_2 + \cos(\pi t)e_3, \qquad t \in [0,1];$$

(c) Per $\lambda = 0$, $x \in \mathbb{R}$, calcolate l'integrale curvilineo di f_0 lungo la curva parametrica

$$\eta(t) = e_1 + (\cos t)e_2 + (\operatorname{sen} t)e_3, \qquad t \in [0, 2\pi].$$

Soluzione. (a) Poiché $\mathbb{R}^3$ è convesso, il campo vettoriale f è conservativo se e solo se è irrotazionale. Le derivate parziali miste delle componenti di f sono date da

$$\begin{aligned} &\partial_y f_\lambda^1(x,y,z) = 6x^2yz + z^2 \qquad &&\partial_x f_\lambda^2(x,y,z) = 6x^2yz + z^2 \qquad &&\partial_x f_\lambda^3(x,y,z) = 3x^2y^2 + \lambda yz \\ &\partial_z f_\lambda^1(x,y,z) = 3x^2y^2 + 2yz \qquad &&\partial_z f_\lambda^2(x,y,z) = 2x^3y + 2xz \qquad &&\partial_y f_\lambda^3(x,y,z) = 2x^3y + \lambda xz \end{aligned}$$

per ogni (x,y,z) e quindi risulta $\partial_y f_\lambda^1 = \partial_x f_\lambda^2$, $\partial_z f_\lambda^1 = \partial_x f_\lambda^3$ e $\partial_z f_\lambda^2 = \partial_y f_\lambda^3$ in $\mathbb{R}^3$ se e solo se è $\lambda = 2$. Per tale scelta di λ un potenziale del campo vettoriale f_2 è la funzione

$$F(x,y,z) = x^3y^2z + xyz^2, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(b) Per $\lambda = 2$ il campo vettoriale f_2 è conservativo e quindi risulta

$$\int_\gamma f_2 \cdot dl = F(\gamma(1)) - F(\gamma(0)).$$

Si ha $\gamma(0) = (0,0,1)$ e $\gamma(1) = (\log 2, 1, -1)$ da cui segue

$$\int_\gamma f_2 \cdot dl = F(\log 2, 1, -1) - F(0,0,1) = \log 2 - \log^3 2.$$

(c) Per $\lambda = 0$ si ha $f_0 = f_2 - g$ ove $g \in C^1(\mathbb{R}^3, \mathbb{R}^3)$ è il campo vettoriale di componenti

$$g^1(x,y,z) = 0; \qquad g^2(x,y,z) = 0; \qquad g^3(x,y,z) = 2xyz;$$

per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$. Poiché f_2 è conservativo ed η è chiusa si ha

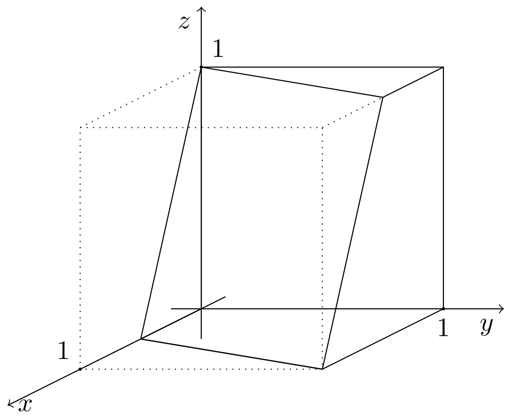
$$\begin{aligned} \int_\eta f_0 \cdot dl &= \int_\eta f_2 \cdot dl - \int_\eta g \cdot dl = \\ &= -\int_\eta g \cdot dl = -\int_0^{2\pi} 2\cos^2 t \operatorname{sen} t \, dt = \frac{2}{3}\cos^3 t \Big|_0^{2\pi} = 0. \end{aligned}$$

Esercizio 5. Sia
$$K = \left\{(x\,,y\,,z):\ 0 \le x\,,y\,,z \le 1 \text{ e } 2x - y + z \le 1\right\}.$$

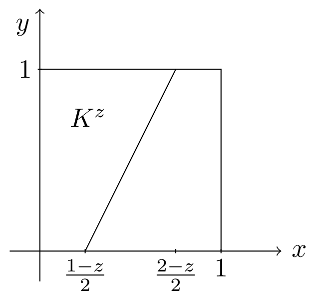
(a) Descrivete e disegnate l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K 2yz\, dm_3(x\,,y\,,z)$.

Soluzione. (a) L'insieme K è il poliedro ottenuto prendendo la parte del cubo di lato unitario con vertice nell'origine contenuto nel semispazio a coordinate positive che sta al di sotto del piano di equazione $2x - y + z = 1$. Esso è rappresentato in Figura (1).



(1)



(2)

(b) L'insieme K è evidentemente compatto e quindi (Lebesgue) misurabile. Inoltre, la funzione
$$f(x\,,y\,,z) = 2yz, \qquad (x\,,y\,,z) \in \mathbb{R}^3,$$
è un polinomio e quindi è integrabile su ogni insieme misurabile e compatto.
Calcoliamo l'integrale di f su K mediante la formula di riduzione per strati. La proiezione di K sull'asse z è l'intervallo $\pi_z(K) = [0\,,1]$ e le corrispondenti sezioni sono gli insiemi
$$K^z = \left\{(x\,,y):\ 2x - y \le 1 - z,\ 0 \le x\,,y \le 1\right\}, \qquad z \in [0,1],$$
rappresentati in Figura (2). Per la formula di riduzione si ha allora
$$I = \int_0^1 \left(\int_{K^z} 2yz\, dm_2(x\,,y)\right) dz$$
e per la stessa formula risulta poi
$$\begin{aligned}\int_{K^z} 2yz\, dm_2(x\,,y) &= \int_0^1 \left(\int_0^{(y-z+1)/2} 2yz\, dx\right) dy = \\ &= \int_0^1 yz(y - z + 1)\, dy = \int_0^1 \left(y^2 z - yz^2 + yz\right) dy = \frac{1}{3}z - \frac{1}{2}z^2 + \frac{1}{2}z = \frac{5}{6}z - \frac{1}{2}z^2\end{aligned}$$
per ogni $z \in [0\,,1]$ da cui segue infine
$$I = \int_0^1 \left(\frac{5}{6}z - \frac{1}{2}z^2\right) dz = \frac{5}{12} - \frac{1}{6} = \frac{1}{4}.$$

Esercizio 6. Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = 2tx(t) - 2t\left(1+t^2\right)[x(t)]^2 \\ x(0) = -1/\mathrm{e}. \end{cases}$$

Soluzione. L'equazione differenziale proposta è un'equazione di Bernoulli. La funzione a secondo membro è

$$f(t,x) = 2tx + 2t\left(1+t^2\right)x^2, \qquad (t,x) \in \mathbb{R}\times\mathbb{R},$$

ed è di classe $f \in C^\infty(\mathbb{R}\times\mathbb{R})$. Conseguentemente, il problema di Cauchy considerato ha soluzione massimale $x \in C^\infty(\alpha,\beta)$ con $-\infty \le \alpha = \alpha(x_0) < 0 < \beta = \beta(x_0) \le +\infty$. Tale soluzione è prolungamento di ogni altra soluzione del medesimo problema di Cauchy.
Poiché la soluzione del medesimo problema di Cauchy con dato iniziale $x_0 = 0$ è la funzione identicamente nulla $x(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, la soluzione massimale del problema di Cauchy considerato verifica la condizione $x(t) < 0$ per ogni $t \in (\alpha,\beta)$. La funzione

$$y(t) = [-x(t)]^\lambda, \qquad t \in (\alpha,\beta),$$

con $\lambda \neq 0$ da determinare è di classe $C^\infty(\alpha,\beta)$ e, essendo $x(t)$ soluzione del problema di Cauchy considerato con $x(t) < 0$ per ogni $t \in (\alpha,\beta)$, risulta

$$\begin{aligned} y'(t) = -\lambda[-x(t)]^{\lambda-1}x'(t) = -\lambda[-x(t)]^{\lambda-1}\left\{2tx(t) - 2t\left(1+t^2\right)[x(t)]^2\right\} = \\ = 2t\lambda y(t) + 2t\lambda\left(1+t^2\right)[-x(t)]^{\lambda+1} \end{aligned}$$

con $y(t) > 0$ per ogni $t \in (\alpha,\beta)$. Scegliendo $\lambda = -1$, la funzione $y(t)$ per $t \in (\alpha,\beta)$ risulta essere soluzione positiva del problema di Cauchy

$$\begin{cases} z'(t) = -2tz(t) - 2t\left(1+t^2\right) \\ z(0) = \mathrm{e}. \end{cases}$$

La soluzione di tale problema è

$$z(t) = \mathrm{e}^{-2t^2}\left\{\mathrm{e} - \int_0^t 2s\left(1+t^2\right)\mathrm{e}^{s^2}\,ds\right\} = \mathrm{e}^{1-t^2} - t^2 = \frac{\mathrm{e} - t^2\mathrm{e}^{t^2}}{\mathrm{e}^{t^2}}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

e quindi $y(t)$ coincide con $z(t)$ sull'intervallo aperto (α,β) contenente l'origine in cui risulta $z(t) > 0$. Risolvendo tale disequazione si trova

$$y(t) = \frac{\mathrm{e} - t^2\mathrm{e}^{t^2}}{\mathrm{e}^{t^2}}, \qquad |t| < 1,$$

e quindi la soluzione massimale del problema di Cauchy proposto è

$$x(t) = \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{t^2\mathrm{e}^{t^2} - \mathrm{e}}, \qquad |t| < 1.$$