COGNOME	______________________	NON SCRIVERE QUI
NOME	______________________	
MATRICOLA	⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌊_⌋	1 · 2 · 3 · 4 · 5 · 6
LAUREA	CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC	

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI

A.A. 2019-2020 — PARMA, 29 GENNAIO 2020

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore e mezza. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. L'integrale curvilineo I della funzione $f(x,y) = x^3 + 2y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ lungo la curva parametrica $\gamma(t) = 2te_1 + t^3e_2$, $t \in [0,1]$, è

(a) $I = \dfrac{5}{16}\left(\sqrt{13^3} - 3\right)$; (b) $I = \dfrac{5}{27}\left(\sqrt{13^3} - 8\right)$; (c) $I = \dfrac{3}{13}\left(\sqrt{23^3} - 1\right)$.

Soluzione. Poiché la curva γ è liscia e la funzione f è continua, risulta

$$I = \int_\gamma f\,dl = \int_0^1 f\left(2t, t^3\right)\|\gamma'(t)\|\,dt =$$
$$= \int_0^1 \left(8t^3 + 2t^3\right)\sqrt{4 + 9t^4}\,dt = \frac{5}{27}\left(4 + 9t^4\right)^{3/2}\Big|_0^1 = \frac{5}{27}\left(\sqrt{13^3} - 8\right).$$

La risposta corretta è quindi (b).

Esercizio 2. Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$ una funzione che ha nell'origine un punto di sella. Quale tra le seguenti matrici H può essere la matrice hessiana di f in $(0,0,0)$?

(a) $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 1 \\ 0 & -3 & 1 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; (b) $H = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$; (c) $H = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 1 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & 4 \end{pmatrix}$.

Soluzione. La matrice H in (a) non è simmetrica e quindi non può essere la matrice hessiana di alcunché. La matrice H in (b) è diagonale con autovalori positivi e quindi non può essere la matrice hessiana in un punto di sella. Infine, la matrice H in (c) è simmetrica con determinate negativo e un autovalore $\lambda = 4$ cosicché i rimanenti due autovalori devono essere di segno discorde. La risposta corretta è quindi (c).

Esercizio 3. Per quali valori del parametro $a \in \mathbb{R}$ il campo vettoriale $f \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ di componenti $f^1(x,y) = x^3 + 5x^4y^2 + \cos y$ e $f^2(x,y) = y^4 + ax^5y - x\operatorname{sen} y$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$, è conservativo in $\mathbb{R}^2$?

(a) $a = 3$; (b) $a = 1$; (c) $a = 2$.

Soluzione. Poiché il campo vettoriale f è di classe C^1 in $\mathbb{R}^2$ ed $\mathbb{R}^2$ è convesso, f è conservativo se e solo se è irrotazionale ovvero risulta $\partial_y f^1 = \partial_x f^2$ in $\mathbb{R}^2$. Si ha

$$\partial_y f^1(x,y) = 10x^4y - \operatorname{sen} y \qquad \text{e} \qquad \partial_x f^2(x,y) = 5ax^4y - \operatorname{sen} y$$

per ogni $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ e quindi risulta $\partial_y f^1(x,y) = \partial_x f^2(x,y)$ per ogni in $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ se e solo se è $a = 2$. La risposta corretta è quindi (c).

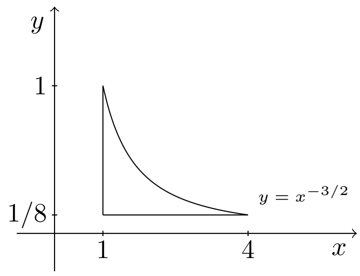
Esercizio 4. Sia
$$f(x,y) = x^3y^2 - 3x + 8y, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2.$$

(a) Determinate gli eventuali punti critici di f e stabilitene la natura.

(b) Determinate massimo e minimo globali di f sull'insieme $K = \left\{(x,y) :\ x \geq 1 \text{ e } \frac{1}{8} \leq y \leq \frac{1}{x^{3/2}}\right\}$;

(c) Determinate l'immagine $f(K)$.

Soluzione. (a) La funzione f è un polinomio e quindi è di classe $C^\infty(\mathbb{R}^2)$. Le derivate parziali di f sono date da
$$f_x(x,y) = 3x^2y^2 - 3 \qquad \text{e} \qquad f_y(x,y) = 2x^3y + 8$$
per ogni (x,y) e quindi i punti critici sono le soluzioni del sistema formato dalle equazioni $x^2y^2 = 1$ e $x^3y = -4$. Poiché deve essere $x \neq 0$ e $y \neq 0$ si ha
$$\begin{cases} x^2y^2 = 1 \\ y = -4/x^3 \end{cases} \qquad \iff \qquad \begin{cases} x^4 = 16 \\ y = -4/x^3 \end{cases}$$
da cui segue $x = \pm 2$ e $y = \mp 1/2$. Pertanto la funzione f ha due punti critici $P_\pm = (\pm 2 \mp 1/2)$.
Le derivate seconde di f sono
$$f_{xx}(x,y) = 6xy^2; \qquad f_{yy}(x,y) = 2x^3; \qquad f_{xy}(x,y) = f_{yx}(x,y) = 6x^2y;$$
per ogni (x,y) e conseguentemente la matrice hessiana di f in $P_\pm$ è
$$D^2f(\pm 2, \mp 1/2) = \begin{pmatrix} \pm 3 & \mp 12 \\ \mp 12 & \pm 16 \end{pmatrix}.$$
Avendo tali matrici determinante negativo, si conclude che entrambi i punti critici $P_\pm$ sono punti di sella di f.
(b) L'insieme K è la porzione del primo quadrante del piano compresa tra la retta di equazione $y = 1/8$ e il grafico della funzione $x \in (0, +\infty) \mapsto x^{-3/2}$ e tra le rette di equazione $x = 1$ e $x = 4$ come rappresentato in figura.



Esso è compatto poiché chiuso (intersezione di controimmagini mediante funzioni continue di intervalli chiusi) e limitato e quindi f assume minimo e massimo globale su K per il teorema di Weierstrass. Poiché f non ha estremi locali, il massimo e il minimo di f su K devono essere assunti sul bordo di K.
Le restrizioni di f alle curve parametriche semplici i cui sostegni formano il bordo di K sono
$$\begin{aligned} &\varphi_1(t) = f(t, 1/8) = t^3/64 - 3t + 1, && 1 \leq t \leq 4; \\ &\varphi_2(t) = f\left(5 - t, (5-t)^{-3/2}\right) = -3(5-t) + \frac{8}{(5-t)^{2/3}} + 1, && 1 \leq t \leq 4; \\ &\varphi_3(t) = f(1, 9/8 - t) = (9/8 - t)^2 + 8(9/8 - t) - 3, && 1/8 \leq t \leq 1. \end{aligned}$$
Studiando l'andamento delle funzioni φ_i nei rispettivi domini si ricava che φ_1 e φ_3 sono decrescenti mentre φ_2 è crescente. Conseguentemente, il minimo globale di f in K è assunto nel punto $P = (4, 1/8)$ ed il massimo globale nel punti $Q = (1,1)$. Risulta quindi
$$\min_K f = f(4, 1/8) = -10 \qquad \text{e} \qquad \max_K f = f(1,1) = 6.$$
(c) L'insieme K è connesso, essendo evidentemente stellato rispetto al punto di coordinate $(1, 1/8)$. Per il teorma dei valori intermedi si ha dunque $f(K) = [-10, 6]$.

Esercizio 5. Sia

$$K = \left\{ (x\,,y\,,z) :\ z + \cos\left(x^2+y^2\right) \le 0,\ \frac{3\pi}{4} \le x^2+y^2 \le \frac{5\pi}{4} \text{ e } x\,,y\,,z \ge 0 \right\}.$$

(a) Descrivete e disegnate l'insieme K.

(b) Calcolate la misura (volume) $|K|$ di K.

Soluzione. A meno delle condizioni $x\,,y \ge 0$ l'insieme K è il solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la figura contenuta nel primo quadrante del piano rz che sta al di sotto del grafico della funzione $z = -\cos r^2$ per $3\pi/4 \le r^2 \le 5\pi/4$.
L'insieme K è evidentemente compatto e (Lebesgue) misurabile (intersezione di un solido di rotazione con un poliedro). La misura di K è l'integrale su K della funzione costante uguale a uno

$$|K| = \int_K 1\, dm_3(x\,,y\,,z)$$

che possiamo calcolare mediante la formula di riduzione per fili.
La proiezione $\pi_{xy}(K)$ di K sul piano xy è il quarto di corona circolare

$$\pi_{xy}(K) = \left\{ (x\,,y) :\ 3\pi/4 \le x^2+y^2 \le 5\pi/4 \text{ e } x\,,y \ge 0 \right\}$$

e le corrispondenti sezioni $K_{(x,y)}$ sono gli intervalli

$$K_{(x,y)} = \left[0, -\cos\left(x^2+y^2\right)\right], \qquad (x\,,y) \in \pi_{xy}(K).$$

Poiché la proiezione $\pi_{xy}(K)$ ed ogni sezione $K_{(x,y)}$ sono insiemi compatti, per la formula di riduzione si ha

$$|K| = \int_{\pi_{xy}(K)} |K_{(x,y)}|\, dm_2(x\,,y) = -\int_{\pi_{xy}(K)} \cos\left(x^2+y^2\right) dV_2(x\,,y).$$

Utilizzando coordinate polari nel piano risulta infine

$$\int_{\pi_{xy}(K)} \cos\left(x^2+y^2\right) dV_2(x\,,y) = \int_0^{\pi/2} 1\, d\theta \cdot \int_{\sqrt{3\pi}/2}^{\sqrt{5\pi}/2} r\cos r^2\, dr = \frac{\pi}{4}\,\operatorname{sen} r^2 \Big|_{\sqrt{3\pi}/2}^{\sqrt{5\pi}/2} = -\frac{\pi}{2\sqrt{2}}$$

da cui segue

$$|K| = \frac{\pi}{2\sqrt{2}}.$$

Esercizio 6. Considerate il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x''(t) - 4x'(t) + 5x(t) = 8\cos t + 5t + 1 \\ x(0) = 3,\ x'(0) = 1. \end{cases}$$

(a) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale.

(b) Determinate la soluzione del problema di Cauchy.

Soluzione. (a) L'equazione proposta è una equazione differenziale lineare del terzo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è $\lambda^2 - 4\lambda + 5 = 0$ le cui soluzioni complesse cfoniugate sono $\lambda = 2 \pm i$. Quindi, le funzioni

$$x_1(t) = \mathrm{e}^{2t}\cos t; \qquad\qquad x_2(t) = \mathrm{e}^{2t}\operatorname{sen} t;$$

con $t \in \mathbb{R}$ sono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{2t}\cos t + C_2\mathrm{e}^{2t}\operatorname{sen} t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
Poiché il termine non omogeneo dell'equazione è la somma di un polinomio di grado uno e di una funzione trigonometrica, cerchiamo una soluzione dell'equazione completa della forma

$$x_p(t) = A\cos t + B\operatorname{sen} t + Ct + D, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $A, B, C, D \in \mathbb{R}$ costanti da determinare. Si ha allora

$$x_p''(t) - 4x_p'(t) + 5x_p(t) = 4(A - B)\cos t + 4(A + B)\operatorname{sen} t + 5Ct + 5D - 4C, \qquad t \in \mathbb{R},$$

da cui segue $A = 1$, $B = -1$, $C = 1$ e $D = 1$.
Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione completa sono le funzioni

$$x(t) = C_1\mathrm{e}^{2t}\cos t + C_2\mathrm{e}^{2t}\operatorname{sen} t + \cos t - \operatorname{sen} t + t + 1, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ costanti arbitrarie.
(b) Scegliamo le costanti $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ in modo che la soluzione $x(t)$ definita in (a) sia tale che $x(0) = 3$ e $x'(0) = -1$. Si ha

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + 2 = 3 \\ x'(0) = 2C_1 + C_2 = 1 \end{cases}$$

da cui segue $C_1 = 1$ e $C_2 = -1$. La soluzione cercata è dunque la funzione

$$x(t) = \mathrm{e}^{2t}\cos t - \mathrm{e}^{2t}\operatorname{sen} t + \cos t - \operatorname{sen} t + t + 1, \qquad t \in \mathbb{R}.$$