| | |
|---|---|
| COGNOME ______________________ | NON SCRIVERE QUI |
| NOME ______________________ | 1 \| 2 \| 3 \| 4 \| 5 \| 6 |
| MATRICOLA \|_\|_\|_\|_\|_\|_\| | |
| LAUREA CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC | |

# UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA
## DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA
## ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI
## A.A. 2019-2020 — PARMA, 15 GENNAIO 2020

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore e mezza. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

**Esercizio 1.** L'insieme $A = \{(x, y) : x < y < 2x \text{ e } 1 < xy < 3\}$ è

(a) chiuso; (b) illimitato; (c) connesso.

---

**Soluzione.** L'insieme $A$ è aperto perché è intersezione di controimmagini di intervalli aperti mediante funzioni continue (polinomi) ed è limitato poiché deve essere $x, y > 0$ e $3 > xy > x^2$ da cui segue $0 < x < \sqrt{3}$ e $\sqrt{3} < y < 2\sqrt{3}$. L'insieme $A$ deve quindi essere connesso. Risulta infatti $A = \Phi(R)$ dove $R$ è il rettangolo aperto $R = (1, 3) \times (1, 2)$ e $\Phi = (\Phi^1, \Phi^2)$ è il diffeomorfismo di $(0, +\infty) \times (0, +\infty)$ su se stesso definito da

$$\Phi^1(u, v) = \sqrt{u/v} \qquad \text{e} \qquad \Phi^2(u, v) = \sqrt{uv}$$

per ogni $u, v > 0$. Essendo $R$ convesso e quindi connesso, anche $A$ è tale per il teorema di Darboux. La risposta corretta è quindi (c).

**Esercizio 2.** L'equazione del piano tangente al grafico di $f(x, y) = e^{x-y^2} + \operatorname{sen}(x + y)$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, nel punto di coordinate $(1, -1)$ è

(a) $2x + 3y - z = -2$; (b) $3x + 2y - z = 0$; (c) $3x - y + 2z = 6$.

---

**Soluzione.** Si ha $f(1, -1) = 1$ e

$$f_x(1, -1) = e^{x-y^2} + \cos(x + y)\Big|_{x=1 \text{ e } y=-1} = 2;$$
$$f_y(\sqrt{\pi}, \sqrt{\pi}) = -2ye^{x-y^2} + \cos(x + y)\Big|_{x=1 \text{ e } y=-1} = 3;$$

e quindi l'equazione del piano tangente è $z = 1 + 2(x - 1) + 3(y + 1)$ da cui segue $2x + 3y - z = -2$. La risposta corretta è quindi (a).

**Esercizio 3.** L'integrale curvilineo $I$ del campo vettoriale $f \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ di componenti $f^1(x, y) = 2x+y$ e $f^2(x, y) = 4y - x$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, lungo la curva parametrica $\gamma(t) = \operatorname{sen}(t)e_1 + te_2$, $t \in [0, \pi]$, è

(a) $I = 4\pi - 2$; (b) $I = 2\pi^2 - 4$; (c) $I = \pi^2 + 2$ .

---

**Soluzione.** Poiché la curva $\gamma$ è liscia e il campo vettoriale $f$ è continuo, risulta

$$I = \int_\gamma f \cdot dl = \int_0^\pi \big[(2 \operatorname{sen} t + t) \cos t + (4t - \operatorname{sen} t)\big]\, dt =$$
$$= \int_0^\pi (2 \cos t \operatorname{sen} t + t \cos t - \operatorname{sen} t + 4t)\, dt = \left(\operatorname{sen}^2 t + t \operatorname{sen} t + 2 \cos t + 2t^2\right)\Big|_0^\pi = 2\pi^2 - 4.$$

La risposta corretta è quindi (b).

**Esercizio 4.** Sia

$$f(x,y) = x^2 + y^2, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

e sia

$$\Gamma = \left\{(x,y):\ 13x^2 - 6\sqrt{3}xy + 7y^2 = 4\right\}.$$

Determinate

(a) Provate che $\Gamma$ è una curva regolare e compatta in $\mathbb{R}^2$.

(b) Determinate il minimo e il massimo globale di $f$ su $\Gamma$.

---

**Soluzione.** (a) Si ha $\Gamma = \{(x,y):\ q_A(x,y) = 1\}$ ove $q_A$ è la forma quadratica associata alla matrice simmetrica

$$A = \begin{pmatrix} 13/4 & -3\sqrt{3}/4 \\ -3\sqrt{3}/4 & 7/4 \end{pmatrix} \in \mathbb{M}^{2\times 2}_{\text{sym}}$$

i cui autovalori sono $\lambda_1 = 1$ e $\lambda_4 = 4$ cui corrispondono gli autovettori (normalizzati) $v_1 = (1/2, \sqrt{3}/2)$ e $v_2 = (\sqrt{3}/2, 1/2)$. Pertanto la forma quadratica $q_A$ è definita positiva e $\Gamma$ è l'ellisse nel piano avente come assi le rette di equazione $\sqrt{3}x - y = 0$ e $x + \sqrt{3}y = 0$ con semiassi di lunghezza 1 e $1/2$ rispettivamente. L'insieme $\Gamma$ è chiuso perché controimmagine di 1 mediante il polinomio $q_A$ ed è limitato poiché la forma quadratica $q_A$ è definita positiva e risulta

$$(x,y) \in \Gamma \qquad \Longrightarrow \qquad 1 \geq q_A(x,y) \geq \min\{\lambda_1, \lambda_2\}\left(x^2 + y^2\right) = \frac{1}{4}\left(x^2 + y^2\right).$$

Questo prova che $\Gamma$ è un insieme compatto. Infine $\Gamma$ è una curva regolare in $\mathbb{R}^2$ poiché il gradiente di $q_A$ si annulla solo nell'origine e $q_A(0,0) = 0$.

(b) La funzione $f$ è un polinomio e dunque è di classe $C^\infty$ in $\mathbb{R}^2$ cosicché per (a) $f$ assume minimo e massimo globale su $\Gamma$ per il teorema di Weierstrass.

Tenuto conto che gli insiemi di livello di $f$ sono circonferenze concentriche con centro nell'origine, da (a) segue immediatamente che i punti di minimo globale e di massimo globale di $f$ su $\Gamma$ sono le intersezioni degli assi con l'ellisse e che i valori di minimo globale e massimo globale sono $1/4$ e 1 rispettivamente.

Alternativamente, essendo $\Gamma$ una curva regolare, possiamo determinare il minimo globale e il massimo globale di $f$ su $\Gamma$ con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange. Il sistema dei moltiplicatori di Lagrange è

$$\begin{cases} 2x - \lambda(26x - 6\sqrt{3}y) = 0 \\ 2y - \lambda(14y - 6\sqrt{3}x) = 0 \\ 13x^2 - 6\sqrt{3}xy + 7y^2 = 4 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} (1 - 13\lambda)x + 3\sqrt{3}\lambda y = 0 \\ 3\sqrt{3}\lambda x + (1 - 7\lambda)y = 0 \\ 13x^2 - 6\sqrt{3}xy + 7y^2 = 4. \end{cases}$$

Affinché il sistema lineare formato dalle prime due equazioni abbia altre soluzioni oltre alla soluzione $x = y = 0$, deve essere

$$\det\begin{pmatrix} 1 - 13\lambda & 3\sqrt{3}\lambda \\ 3\sqrt{3}\lambda & 1 - 7\lambda \end{pmatrix} = 64\lambda^2 - 20\lambda + 1 = 0$$

e ciò avviene per $\lambda = 1/16$ e $\lambda = 1/4$.

Nel primo caso $\lambda = 1/16$, le soluzioni delle prime due equazioni del sistema dei moltiplicatori di Lagrange sono i punti $(x,y)$ tali che $x = -\sqrt{3}y$. Imponendo che tali punti stiano su $\Gamma$, si trovano i punti di coordinate $P_\pm = (\mp\sqrt{3}/4, \pm 1/4)$.

Nell'altro caso $\lambda = 1/4$, le soluzioni delle prime due equazioni del sistema dei moltiplicatori di Lagrange sono i punti $(x,y)$ tali che $y = \sqrt{3}x$ e, imponendo che tali punti stiano su $\Gamma$, si trovano i punti di coordinate $Q_\pm = (\pm 1/2, \pm\sqrt{3}/2)$.

Risulta infine $f(P_\pm) = 1/4$ e $f(Q_\pm) = 1$ come previsto e conseguentemente il minimo globale di $f$ su $\Gamma$ è assunto nei punti $P_\pm$ mentre il massimo globale è assunto nei punti $Q_\pm$.

Gli insiemi di livello $\{f = 1\}$, $\{f = 1/4\}$ e il bordo di $\Gamma$ sono rappresentati nella seguente figura.

**Esercizio 5.** Sia

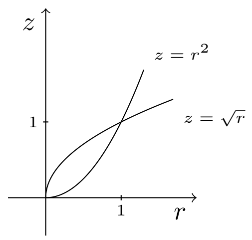
$$K = \left\{ (x, y, z) : \ x^2 + y^2 \le z \le \sqrt[4]{x^2 + y^2} \text{ e } |y| \le x \right\}.$$

(a) Descrivete e disegnate l'insieme $K$.

(b) Calcolate $I = \int_K xz dm_3(x, y, z)$ e $J = \int_K yz dm_3(x, y, z)$.

---

**Soluzione.** L'insieme $K$ è l'intersezione del poliedro definito da $|y| \le x$ con il solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse $z$ la figura contenuta nel primo quadrante del piano $rz$ (con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$) compresa tra la parabola $z = r^2$ e il grafico della funzione $z = \sqrt{r}$ come illustrato nella figura seguente.




L'insieme $K$ è compatto perché è limitato ed è intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue e quindi è (Lebesgue) misurabile. Le funzioni $f$ e $g$ definite da

$$f(x, y, z) = xz \qquad \text{e} \qquad g(x, y, z) = yz$$

per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ sono polinomi e quindi sono integrabili in $K$.
Calcoliamo $I$ mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione di $K$ sul piano $xy$ è la porzione di cerchio

$$\pi_{xy}(K) = \left\{ (x, y) : \ x^2 + y^2 \le 1 \text{ e } |y| \le x \right\}$$

e per ogni $(x, y) \in \pi_{xy}(K)$ la corrispondente sezione è il segmento

$$K_{(x,y)} = \left[ x^2 + y^2, \sqrt[4]{x^2 - y^2} \right], \qquad (x, y) \in \pi_{xy}(K).$$

Per la formula di riduzione si ha allora

$$I = \int_{\pi_{xy}(K)} \left( \int_{x^2+y^2}^{\sqrt[4]{x^2+y^2}} xz dz \right) dm_2(x, y) = \frac{1}{2} \int_{\pi_{xy}(K)} x \left[ \sqrt{x^2 + y^2} - \left(x^2 + y^2\right)^2 \right] dm_2(x, y)$$

e, utilizzando coordinate polari nel piano abbinate nuovamente alla formula di riduzione, risulta

$$I = \frac{1}{2} \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \cos\theta \, d\theta \int_0^1 r^2 \left(r - r^4\right) dr = \frac{1}{2} \operatorname{sen}\theta \Big|_{-\pi/4}^{\pi/4} \left( \frac{1}{4} r^4 - \frac{1}{7} r^7 \right) \Big|_0^1 = \frac{3\sqrt{2}}{56}.$$

Infine, per il calcolo di $J$ osserviamo che, posto

$$K_\pm = \left\{ (x, y, z) : \ \pm y \ge 0 \right\},$$

risulta $K = K_+ \cup K_-$ e $|K_+ \cap K_-| = 0$ cosicché da

$$(x, y, z) \in K_+ \qquad \Longleftrightarrow \qquad (x, -y, z) \in K_-$$

e da $g(x, -y, z) = -g(x, y, z)$ per ogni $(x, y, z) \in \mathbb{R}^3$ dalla formula di cambiamento di variabili si ricava

$$\begin{aligned} J &= \int_{K_+} g(x, y, z) \, dm_3(x, y, z) + \int_{K_-} g(x, y, z) \, dm_3(x, y, z) = \\ &= \int_{K_+} g(x, y, z) \, dm_3(x, y, z) - \int_{K_+} g(x, y, z) \, dm_3(x, y, z) = 0. \end{aligned}$$

**Esercizio 6.** Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = 2t\left([x(t)]^3 + x(t)\right) \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

---

**Soluzione.** L'equazione differenziale proposta può essere risolta come equazione a variabili separabili o come equazione di Bernoulli. Procediamo in questo secondo modo.
La funzione a secondo membro è

$$f(t,x) = 2tx + 2tx^3, \qquad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

ed è di classe $f \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Conseguentemente, il problema di Cauchy considerato ha soluzione massimale $x \in C^\infty(\alpha, \beta)$ con $-\infty \le \alpha = \alpha(x_0) < 0 < \beta = \beta(x_0) \le +\infty$. Tale soluzione è prolungamento di ogni altra soluzione del medesimo problema di Cauchy.
Poiché la soluzione del medesimo problema di Cauchy con dato iniziale $x_0 = 0$ è la funzione identicamente nulla $x(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, la soluzione massimale del problema di Cauchy considerato verifica la condizione $x(t) > 0$ per ogni $t \in (\alpha, \beta)$. La funzione

$$y(t) = [x(t)]^\lambda, \qquad t \in (\alpha, \beta),$$

con $\lambda \neq 0$ da determinare è di classe $C^\infty(\alpha, \beta)$ e, essendo $x(t)$ soluzione del problema di Cauchy considerato con $x(t) > 0$ per ogni $t \in (\alpha, \beta)$, risulta

$$y'(t) = \lambda[x(t)]^{\lambda-1}x'(t) = 2t\lambda[x(t)]^{\lambda-1}\left([x(t)]^3 + x(t)\right) = 2t\lambda y(t) + 2t\lambda[x(t)]^{\lambda+2}$$

con $y(t) > 0$ per ogni $t \in (\alpha, \beta)$. Scegliendo $\lambda = -2$, la funzione $y(t)$ per $t \in (\alpha, \beta)$ risulta essere soluzione positiva del problema di Cauchy

$$\begin{cases} z'(t) = -4tz(t) - 4t \\ z(0) = 1. \end{cases}$$

La soluzione di tale problema è

$$z(t) = \mathrm{e}^{-2t^2}\left\{1 - \int_0^t 4s\mathrm{e}^{2s^2}\,ds\right\} = 2\mathrm{e}^{-2t^2} - 1, \qquad t \in \mathbb{R},$$

e quindi $y(t)$ coincide con $z(t)$ sull'intervallo aperto $(\alpha, \beta)$ contenente l'origine in cui risulta $z(t) > 0$. Risolvendo tale disequazione si trova

$$y(t) = 2\mathrm{e}^{-2t^2} - 1, \qquad |t| < \sqrt{\log\sqrt{2}},$$

e quindi la soluzione massimale del problema di Cauchy proposto è

$$x(t) = \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{\sqrt{2 - \mathrm{e}^{2t^2}}}, \qquad |t| < \sqrt{\log\sqrt{2}}.$$