Cognome	____________________	
Nome	____________________	Non scrivere qui
Matricola	|_|_|_|_|_|_|	1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6
Laurea	Civ Amb Gest Inf Eln Tlc Mec	

Università degli Studi di Parma

Dipartimento di Ingegneria e Architettura

Esame di Analisi Matematica 2 — Soluzioni

A.A. 2018-2019 — Parma, 29 Novembre 2019

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio. Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore e mezza. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Sia $E = \{(x, y) : \ x^2 + y^2 \leq 10 \text{ e } y^2 - x^2 \leq 8\}$. Quale tra le seguenti affermazioni è falsa?

(a) E è limitato; (b) E è chiuso; (c) E è convesso.

Soluzione. L'insieme E è evidentemente chiuso e limitato quindi deve essere falsa l'affermazione (c). Infatti, i punti di coordinate $P_t = (t, \sqrt{t^2+8})$ per $|t| \leq 1$ appartengono a E poiché si ha

$$t^2 + (t^2+2) = 2t^2 + 8 \leq 10 \qquad \text{e} \qquad (t^2+8) - t^2 = 8$$

per ogni t con $|t| \leq 1$ ma il punto medio del segmento $[P_{-t}, P_t]$ ha coordinate $(0, \sqrt{t^2+8})$ e quindi non appartiene ad E per $0 < t \leq 1$. La risposta corretta è quindi (c).

Esercizio 2. L'integrale curvilineo I del campo vettoriale $f \in C(\mathbb{R}^2, \mathbb{R}^2)$ di componenti $f^1(x, y) = y$ e $f^2(x, y) = x$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$, lungo la curva parametrica $\gamma(t) = 2\cos(t)e_1 + \operatorname{sen}(t)e_2$, $t \in [0, \pi/4]$, è

(a) $I = 1 + 1/\sqrt{2}$; (b) $I = \sqrt{2} - 1$; (c) $I = 1$.

Soluzione. Poiché la curva γ è liscia, risulta

$$I = \int_\gamma f \cdot dl = \int_0^{\pi/4} \left[\operatorname{sen} t(-2\operatorname{sen} t) + \cos t \cos t\right] \, dt =$$

$$= 2\int_0^{\pi/4} \left(\cos^2 t - \operatorname{sen}^2 t\right) \, dt = 2\int_0^{\pi/4} \left(1 - 2\operatorname{sen}^2 t\right) \, dt = 2\operatorname{sen} t \cos t\Big|_0^{\pi/4} = 1.$$

Alternativamente si può osservare che $F(x, y) = xy$, $(x, y) \in \mathbb{R}^2$ è un potenziale di f e quindi si ha

$$I = \int_\gamma f \cdot dl = F(\gamma(\pi/4)) - F(\gamma(0)) = F(\sqrt{2}, 1/\sqrt{2}) - F(2, 0) = 1.$$

La risposta corretta è quindi (c).

Esercizio 3. Sia $f \in C^2(\mathbb{R}^3)$ una funzione che ha nell'origine un punto di minimo locale. Quale tra le seguenti matrici H può essere la matrice hessiana di f in $(0, 0, 0)$?

$$\text{(a) } H = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \text{(b) } H = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}; \qquad \text{(c) } H = \begin{pmatrix} 4 & -1 & 0 \\ -1 & -2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

Soluzione. La matrice (a) non è simmetrica e quindi non può essere la matrice hessiana di alcunché. Per le matrici (b) e (c) i minori di NordOvest sono $M_1 = 4$, $M_2 = 7$ e $M_3 = 3$ e $M_1 = 4$, $M_2 = -9$ e $M_3 = 5$ rispettivamente. Per il criterio di Sylvester gli autovalori della matrice (b) sono tutti positivi mentre gli autovalori della matrice (c) sono tutti diversi da zero ma non possono essere né tutti positivi né tutti negativi. La risposta corretta è quindi (b).

Esercizio 4. Determinate il massimo ed il minimo globale di

$$f(x,y,z) = \frac{2}{3}x^3 - 2y^2 + z, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3,$$

sulla sfera

$$S^2 = \left\{(x,y,z):\ x^2+y^2+z^2=1\right\}.$$

Soluzione. La funzione f è un polinomio e quindi per il teorema di Weierstrass assume minimo e massimo globale su S^2 che è una superficie regolare e compatta in $\mathbb{R}^3$. Possiamo quindi determinare tali punti con i moltiplicatori di Lagrange. Il sistema corrispondente è

$$\begin{cases} 2x^2 - 2\lambda x = 0 \\ -4y - 2\lambda y = 0 \\ 1 - 2\lambda z = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} x(x-\lambda) = 0 \\ y(2+\lambda) = 0 \\ 1 - 2\lambda z = 0. \end{cases}$$

Deve evidentemente essere $\lambda \neq 0$ e $z = 1/2\lambda$ e dalla seconda equazione si ricava facilmente che deve essere $\lambda = -2$ cui corrispondono le soluzioni

$$x = 0; \quad y \in \mathbb{R}; \quad z = -1/4; \qquad \text{e} \qquad x = -2; \quad y \in \mathbb{R}; \quad z = -1/4;$$

o altrimenti deve essere $y = 0$ cui corrispondono le soluzioni

$$x = 0; \quad y = 0; \quad z = 1/2\lambda; \qquad \text{e} \qquad x = \lambda; \quad y = 0; \quad z = 1/2\lambda.$$

Imponendo che tali punti stiano su S^2 si trovano i punti di coordinate

$$P_\pm = (0, \pm\sqrt{15}/4, -1/4); \qquad Q_\pm = (0,0,\pm 1); \qquad R_\pm = (\pm 1/\sqrt{2}, 0, \pm 1/\sqrt{2}).$$

I valori assunti da f in tali punti sono

$$f(0, \pm\sqrt{15}/4, -1/4) = -\frac{31}{4}; \qquad f(0,0,\pm 1) = \pm 1; \qquad f(\pm 1/\sqrt{2}, 0, \pm 1/\sqrt{2}) = \pm\frac{4}{3\sqrt{2}};$$

cosicché, essendo $4/3\sqrt{2} < 1$, si conclude che il punto di massimo globale di f su S^2 è $Q_+ = (0,0,1)$ mentre i punti di minimo globale di f su S^2 sono $P_\pm = (0, \pm\sqrt{15}/4, -1/4)$.

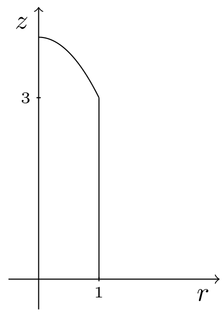
Esercizio 5. Sia

$$K = \left\{(x, y, z) : \ 0 \le z \le 4 - (x^2 + y^2),\ x^2 + y^2 \le 1 \text{ e } 0 \le x \le y\right\}.$$

(a) Descrivete e disegnate l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K \left(x^2 - y^2\right) dV_3(x, y, z)$.

Soluzione. L'insieme K è l'intersezione del poliedro definito da $0 \le x \le y$ con il solido di rotazione che si ottiene facendo ruotare attorno all'asse z la figura contenuta nel primo quadrante del piano rz (con $r = \sqrt{x^2 + y^2}$) compresa tra la parabola $z = 4 - r^2$ e la retta $r = 1$ come illustrato nella figura seguente.



L'insieme K è compatto perché è limitato ed è intersezione di controimmagini di intervalli chiusi mediante funzioni continue. Inoltre, K è misurabile poiché è intersezione di un solido di rotazione e di semispazi.
La funzione

$$f(x, y, z) = x^2 - y^2, \qquad (x, y, z) \in \mathbb{R}^3,$$

è un polinomio e quindi integrabile su K.
Calcoliamo l'integrale di f su K mediante la formula di riduzione per fili. La proiezione di K sul piano xy è la porzione di cerchio

$$\pi_{xy}(K) = \left\{(x, y) : \ x^2 + y^2 \le 1 \text{ e } 0 \le x \le y\right\}$$

e per ogni $(x, y) \in \pi_{xy}(K)$ la corrispondente sezione è il segmento

$$K_{(x,y)} = [0, 4 - x^2 - y^2], \qquad (x, y) \in \pi_{xy}(K).$$

Per la formula di riduzione si ha allora

$$I = \int_{\pi_{xy}(K)} \left(\int_0^{4-x^2-y^2} \left(x^2 - y^2\right) dz\right) dV_2(x, y) = \int_{\pi_{xy}(K)} \left(x^2 - y^2\right)\left(4 - x^2 - y^2\right) dV_2(x, y)$$

e, utilizzando coordinate polari nel piano abbinate nuovamente alla formula di riduzione, risulta

$$\begin{aligned} I &= \int_{\pi/4}^{\pi/2} \left(\cos^2\theta - \operatorname{sen}^2\theta\right) d\theta \int_0^1 r^3 \left(4 - r^2\right) dr = \\ &= \operatorname{sen}\theta\cos\theta\Big|_{\pi/4}^{\pi/2} \int_0^1 \left(4r^3 - r^5\right) dr = \\ &= -\frac{1}{2}\left(r^4 - \frac{1}{6}r^6\right)\Big|_0^1 = \cdots = -\frac{5}{12}. \end{aligned}$$

Esercizio 6. Considerate il problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'''(t) - 5x''(t) + 6x'(t) = 12t - 10 - 2\mathrm{e}^t \\ x(0) = 5,\ x'(0) = 2 \text{ e } x''(0) = 4. \end{cases}$$

(a) Determinate tutte le soluzioni dell'equazione differenziale.

(b) Determinate la soluzione del problema di Cauchy.

Soluzione. (a) L'equazione proposta è una equazione differenziale lineare del terzo ordine a coefficienti costanti. L'equazione caratteristica è $\lambda^3 - 5\lambda^2 + 6\lambda = 0$ le cui soluzioni sono $\lambda = 0$, $\lambda = 2$ e $\lambda = 3$. Quindi, le funzioni

$$x_1(t) = 1; \qquad x_2(t) = \mathrm{e}^{2t}; \qquad x_3(t) = \mathrm{e}^{3t};$$

con $t \in \mathbb{R}$ sono un sistema fondamentale di soluzioni dell'equazione omogenea e tutte le soluzioni dell'equazione omogenea sono le funzioni

$$x(t) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{2t} + C_3\mathrm{e}^{3t}, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, 3)$ costanti arbitrarie.
Poiché il termine non omogeneo dell'equazione è la somma di un polinomio di grado uno e di un esponenziale che non è soluzione dell'equazione omogenea, cerchiamo una soluzione dell'equazione completa della forma

$$x_p(t) = A\mathrm{e}^t + t(Bt + C), \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $A, B, C \in \mathbb{R}$ costanti da determinare. Si ha allora

$$x_p'''(t) - 5x_p''(t) + 6x_p'(t) = 2A\mathrm{e}^t + 12Bt - 10B + 6C, \qquad t \in \mathbb{R},$$

da cui segue $A = -1$, $B = 1$ e $C = 0$.
Pertanto tutte le soluzioni dell'equazione completa sono le funzioni

$$x(t) = C_1 + C_2\mathrm{e}^{2t} + C_3\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^t + t^2, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2, 3)$ costanti arbitrarie.
Alternativamente l'equazione proposta può essere vista come un'equazione lineare del secondo ordine a coefficienti costanti nell'incognita $y(t) = x'(t)$ con $t \in \mathbb{R}$ le cui soluzioni risultano essere tutte le funzioni della forma

$$y(t) = C_2\mathrm{e}^{2t} + C_3\mathrm{e}^{3t} - \mathrm{e}^t + 2t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

con $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 2, 3)$ costanti arbitrarie da cui segue integrando $x(t)$ come prima modificando le costanti arbitrarie.
(b) Scegliamo le costanti $C_i \in \mathbb{R}$ $(i = 1, 2)$ in modo che la soluzione $x(t)$ definita in (a) sia tale che $x(0) = 4$ e $x'(0) = 1$. Si ha

$$\begin{cases} x(0) = C_1 + C_2 + C_3 - 1 = 5 \\ x'(0) = 2C_2 + 3C_3 - 1 = 2 \\ x''(0) = 4C_2 + 9C_3 - 1 + 2 = 2 \end{cases} \iff \begin{cases} C_1 + C_2 + C_3 = 6 \\ 2C_2 + 3C_3 = 3 \\ 4C_2 + 9C_3 = 3 \end{cases}$$

da cui segue $C_1 = 4$, $C_2 = 3$ e $C_3 = -1$. La soluzione cercata è dunque la funzione

$$x(t) = -\mathrm{e}^{3t} + 3\mathrm{e}^{2t} - \mathrm{e}^t + t^2 + 4, \qquad t \in \mathbb{R}.$$