COGNOME	____________________	NON SCRIVERE QUI
NOME	____________________	1 2 3 4 5 6
MATRICOLA	________	
LAUREA	CIV AMB GEST INF ELN TLC MEC	

UNIVERSITÀ DEGLI STUDI DI PARMA

DIPARTIMENTO DI INGEGNERIA E ARCHITETTURA

ESAME DI ANALISI MATEMATICA 2 — SOLUZIONI

A.A. 2018-2019 — PARMA, 16 SETTEMBRE 2019

Compilate l'intestazione in alto a sinistra e scrivete cognome e nome in stampatello anche su ogni altro foglio.
Il tempo massimo per svolgere la prova è di due ore e mezza. Al momento della consegna, inserite tutti i fogli dentro a questo foglio.

Esercizio 1. Quale delle seguenti funzioni è differenziabile in ogni punto $(x, y) \in \mathbb{R}^2$?

(a) $f(x, y) = \tan\left(x^2 + y^2\right)$; (b) $g(x, y) = x \log\left(1 + |x + y^2|\right)$; (c) $h(x, y) = |x|^{5/2} e^{x+y^3}$.

Soluzione. La funzione f non è definita sulle circonferenze $x^2 + y^2 = (2k + 1)\pi/2$ ($k \in \mathbb{N}$) e non esiste la derivata parziale g_x di g nei punti (x, y) con $x + y^2 = 0$ e $x, y \neq 0$ poiché si ha

$$\lim_{t \to 0^\pm} \frac{g(x + t, y) - g(x, y)}{t} = \lim_{t \to 0^\pm} (x + t) \frac{\log(1 + |t|)}{t} = \pm x.$$

Invece la funzione h ha drivate parziali continue in tutto $\mathbb{R}^2$ date da

$$h_x(x, y) = \frac{5}{2}|x|^{3/2} \operatorname{sgn}(x) e^{x+y^3} + |x|^{5/2} e^{x+y^3} \qquad \text{e} \qquad h_y(x, y) = 3|x|^{5/2} y^2 e^{x+y^3}$$

per ogni $(x, y) \in \mathbb{R}^2$. La risposta corretta è quindi (c).

Esercizio 2. Siano $K = \left\{(x, y, z) :\ x^2 + y^2 + z^2 \le 1 \text{ e } x \ge 0\right\}$ e $I = \int_K x \, dV_3(x, y, z)$. Allora,

(a) $I = 2\pi$; (b) $I = -3\pi/2$; (c) $I = \pi/4$.

Soluzione. L'insieme K è compatto e misurabile e in coordinate sferiche risulta

$$\Phi^{-1}(K) = \left\{(r, \vartheta, \varphi) :\ 0 \le r \le 1,\ -\pi/2 \le \vartheta \le \pi/2 \text{ e } 0 \le \varphi \le \pi\right\}.$$

Per la formula di cambiamento di variabili e per la formula di riduzione risulta

$$I = \int_{\Phi^{-1}(K)} r^3 \cos\vartheta \operatorname{sen}^2\varphi \, dV_3(r, \vartheta, \varphi) = \int_0^1 r^3 \, dr \int_{-\pi/2}^{\pi/2} \cos\vartheta \, d\vartheta \int_0^\pi \operatorname{sen}^2\varphi \, d\varphi = \frac{1}{4} \cdot 2 \cdot \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{4}.$$

La risposta corretta è quindi (c).

Esercizio 3. Quale delle seguenti equazioni differenziali non ammette alcuna soluzione costante definita su tutto $\mathbb{R}$?

(a) $x''(t) - x'(t) = 2$; (b) $x'(t) = \log\left([x(t)]^2 + 1\right)$; (c) $x''(t) + x'(t) + x(t) = 0$.

Soluzione. Tutte le soluzioni della prima equazione sono date dalle funzioni

$$x(t) = C_1 + C_2 e^t - 2t, \qquad t \in \mathbb{R},$$

al variare di $C_1, C_2 \in \mathbb{R}$ costanti arbitrarie. Per nessuna scelta di C_1 e C_2 la corrispondente soluzione è costante mentre la funzione $x(t) = 0$ per $t \in \mathbb{R}$ è evidentemente soluzione di entrambe le restanti due equazioni differenziali. La risposta corretta è quindi (a).

Esercizio 4. Sia

$$f(x,y,z) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 + z^2 - 2xz, \qquad (x,y,z) \in \mathbb{R}^3.$$

(a) Determinate i punti critici di f e stabilitene la natura.

(b) Determinate il massimo ed il minimo globale di f sull'insieme $\Gamma = \{(x,y,z) : x^2 + 4y^2 = 4 \text{ e } z = 0\}$.

Soluzione. (a) La funzione f è un polinomio e dunque è di classe C^∞ in $\mathbb{R}^3$. Le derivate parziali di f sono date da

$$f_x(x,y,z) = 4x^3 - 2x - 2z; \qquad f_y(x,y,z) = 4y^3 - 2y; \qquad f_z(x,y,z) = 2z - 2x;$$

per ogni $(x,y,z) \in \mathbb{R}^3$ e quindi i punti critici sono le soluzioni del sistema formato dalle tre equazioni

$$2x^3 - x - z = 0; \qquad y(2y^2 - 1) = 0; \qquad z - x = 0;$$

ovvero i punti di coordinate

$$P = (0,0,0); \qquad Q_\pm = (0, \pm 1/\sqrt{2}, 0); \qquad R_\pm = (\pm 1, 0, \pm 1); \qquad S_{\pm,\pm} = (\pm 1, \pm 1/\sqrt{2}, \pm 1);$$

dove 1 compare sempre con lo stesso segno indipendente dal segno di $1/\sqrt{2}$ (nove punti critici in tutto). Le derivate parziali seconde di f sono

$$\begin{aligned} f_{xx}(x,y,z) &= 12x^2 - 2; \qquad & f_{xy}(x,y,z) &= f_{yx}(x,y,z) = 0; \\ f_{yy}(x,y,z) &= 12y^2 - 2; & f_{yz}(x,y,z) &= f_{zy}(x,y,z) = 0; \\ f_{zz}(x,y,z) &= 2; & f_{xz}(x,y,z) &= f_{zx}(x,y,z) = -2; \end{aligned}$$

per ogni (x,y,z) e quindi le matrici hessiane nei punti critici sono

$$D^2 f(P) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad D^2 f(Q_\pm) = \begin{pmatrix} -2 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix};$$

$$D^2 f(R_\pm) = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}; \qquad D^2 f(S_{\pm,\pm}) = \begin{pmatrix} 10 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 0 \\ -2 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

I minori di NordOvest M_1, M_2 e M_3 delle matrici hessiane di f nei punti critici sono:

$$\begin{array}{llllllll} P: & M_1 = -2; & M_2 = 4; & M_3 = 16; & Q_\pm: & M_1 = -2; & M_2 = -8; & M_3 = -32; \\ R_\pm: & M_1 = 10; & M_2 = -20; & M_3 = -32; & S_{\pm,\pm}: & M_1 = 10; & M_2 = 40; & M_3 = 64; \end{array}$$

e quindi per il criterio di Sylvester i punti P, $Q_\pm$ e $R_\pm$ sono punti di sella mentre i quattro punti $S_{\pm,\pm}$ sono punti di minimo locale stretto (in effetti globale).

(b) Si ha

$$(x,y,z) \in \Gamma \qquad \Longrightarrow \qquad f(x,y,z) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2 = g(x,y)$$

e quindi cercare il minimo e il massimo globale di f su Γ equivale a cercare il minimo e il massimo globale della funzione $g(x,y) = x^4 + y^4 - x^2 - y^2$, $(x,y) \in \mathbb{R}^2$ sull'ellisse $\Gamma_0 = \{(x,y) : x^2 + 4y^2 = 4\}$ che è una curva regolare e compatta in $\mathbb{R}^2$. Imponendo con il metodo dei moltiplicatori di Lagrange che risulti

$$\det \begin{pmatrix} 4x^3 - 2x & 4y^3 - 2y \\ 2x & 8y \end{pmatrix} = 0 \qquad \text{e} \qquad x^2 + 4y^2 = 4,$$

si trovano i punti di coordinate $A_\pm = (0, \pm 1)$, $B_\pm(\pm 2, 0)$ e $C_{\pm,\pm} = (\pm\sqrt{20/34}, \pm\sqrt{29/34})$ (otto punti in tutto). Confrontando i valori di g in tali punti si conclude che il massimo globale è assunto nei punti $B_\pm$ ed il minimo globale nei punti $C_{\pm,\pm}$ e che in tali punti risulta

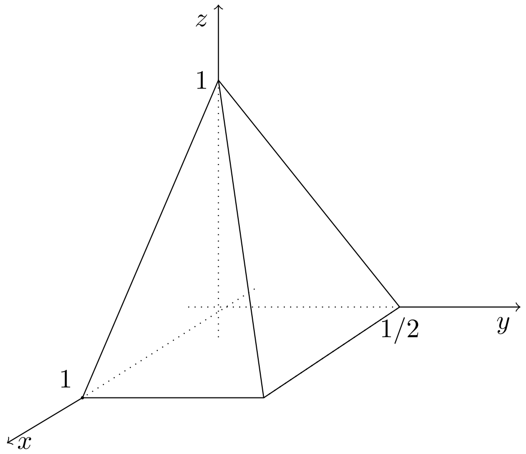
$$g(B_\pm) = 12 \qquad \text{e} \qquad g(C_{\pm,\pm}) = -\frac{425}{1156}.$$

Esercizio 5. Sia
$$K = \left\{ (x\,, y\,, z) : \; x\,, y\,, z \geq 0 \text{ e } \max\{x\,, 2y\} \leq 1 - z \right\}.$$

(a) Descrivete e disegnate l'insieme K.

(b) Calcolate $I = \displaystyle\int_K xy\, dV_3(x\,, y\,, z)$.

Soluzione. (a) L'insieme K è la piramide (non retta) con base il quadrato $[0\,, 1] \times [0\,, 1/2]$ nel piano xy e vertice nel punto di coordinate $(0\,, 0\,, 1)$. Esso è rappresentato nella figura seguente.



(b) L'insieme K è evidentemente compatto ed è misurabile poiché è un poliedro. Inoltre, la funzione
$$f(x\,, y\,, z) = xy, \qquad (x\,, y\,, z) \in \mathbb{R}^3,$$
è continua su $\mathbb{R}^3$ e quindi integrabile su ogni insieme misurabile e compatto.
Calcoliamo l'integrale di f su K mediante la formula di riduzione per strati. La proiezione di K sull'asse z è l'intervallo $\pi_z(K) = [0\,, 1]$ e le corrispondenti sezioni sono i quadrati
$$K^z = \left\{ (x\,, y) : \; 0 \leq x \leq 1 - z,\, 0 \leq y \leq (1 - z)/2 \right\}, \qquad z \in [0\,, 1].$$
Per la formula di riduzione si ha allora
$$I = \int_0^1 \left(\int_{K^z} xy\, dV_2(x\,, y) \right) dz$$
e per la stessa formula risulta poi
$$\int_{K^z} xy\, dV_2(x\,, y) = \left(\int_0^{1-z} x\, dx \right) \left(\int_0^{(1-z)/2} y\, dy \right) = \left(\frac{x^2}{2} \bigg|_0^{1-z} \right) \left(\frac{y^2}{2} \bigg|_0^{(1-z)/2} \right) = \frac{1}{16}(1 - z)^4$$
per ogni $z \in [0\,, 1]$. Integrando per parti si ha infine
$$I = \int_0^1 \frac{1}{16}(1 - z)^4\, dz = -\frac{1}{80}(1 - z)^5 \bigg|_0^1 = \frac{1}{80}.$$

Esercizio 6. Determinate la soluzione del problema di Cauchy

$$\begin{cases} x'(t) = 2t\Big([x(t)]^2 + x(t)\Big) \\ x(0) = 1. \end{cases}$$

Soluzione. L'equazione differenziale proposta può essere risolta come equazione a variabili separabili o come equazione di Bernoulli. Procediamo in questo secondo modo.
La funzione a secondo membro è

$$f(t,x) = 2tx + 2tx^2, \qquad (t,x) \in \mathbb{R} \times \mathbb{R},$$

ed è di classe $f \in C^\infty(\mathbb{R} \times \mathbb{R})$. Conseguentemente, il problema di Cauchy considerato ha soluzione massimale $x \in C^\infty(\alpha, \beta)$ con $-\infty \le \alpha = \alpha(x_0) < 0 < \beta = \beta(x_0) \le +\infty$. Tale soluzione è prolungamento di ogni altra soluzione del medesimo problema di Cauchy.
Poiché la soluzione del medesimo problema di Cauchy con dato iniziale $x_0 = 0$ è la funzione identicamente nulla $x(t) = 0$ per ogni $t \in \mathbb{R}$, la soluzione massimale del problema di Cauchy considerato verifica la condizione $x(t) > 0$ per ogni $t \in (\alpha, \beta)$. La funzione

$$y(t) = [x(t)]^\lambda, \qquad t \in (\alpha, \beta),$$

con $\lambda \neq 0$ da determinare è di classe $C^\infty(\alpha, \beta)$ e, essendo $x(t)$ soluzione del problema di Cauchy considerato con $x(t) > 0$ per ogni $t \in (\alpha, \beta)$, risulta

$$y'(t) = \lambda[x(t)]^{\lambda-1}x'(t) = 2t\lambda[x(t)]^{\lambda-1}\Big([x(t)]^2 + x(t)\Big) = 2t\lambda y(t) + 2t\lambda[x(t)]^{\lambda+1}$$

con $y(t) > 0$ per ogni $t \in (\alpha, \beta)$. Scegliendo $\lambda = -1$, la funzione $y(t)$ per $t \in (\alpha, \beta)$ risulta essere soluzione positiva del problema di Cauchy

$$\begin{cases} z'(t) = -2tz(t) - 2t \\ z(0) = 1. \end{cases}$$

La soluzione di tale problema è

$$z(t) = \mathrm{e}^{-t^2}\left\{1 - \int_0^t 2s\mathrm{e}^{s^2}\,ds\right\} = 2\mathrm{e}^{-t^2} - 1, \qquad t \in \mathbb{R},$$

e quindi $y(t)$ coincide con $z(t)$ sull'intervallo aperto (α, β) contenente l'origine in cui risulta $z(t) > 0$. Si ha pertanto

$$y(t) = 2\mathrm{e}^{-t^2} - 1, \qquad |t| < \sqrt{2},$$

e quindi la soluzione massimale del problema di Cauchy proposto è

$$x(t) = \frac{\mathrm{e}^{t^2}}{2 - \mathrm{e}^{t^2}}, \qquad |t| < \sqrt{\log 2}.$$